Conceptos fundamentales en Teoría de Circuitos Eléctricos

Juan García Naya

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Oviedo

INDICE

TEMA 1.- Conocimientos Básicos. Elementos de un Circuito.

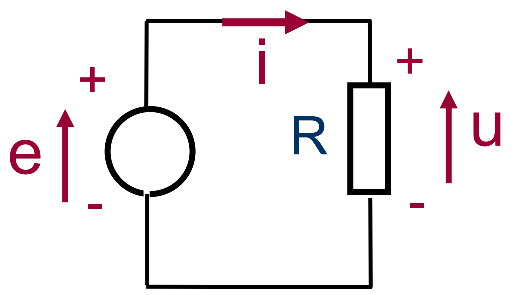
En este tema hablaremos de cinco aspectos básicos de la teoría de los circuitos eléctricos, que son:

1. Las magnitudes, unidades y convenios que se utilizan en los circuitos.
2. Las leyes que rigen el funcionamiento de los circuitos.
3. La descripción de los elementos de un circuito.
4. Las expresiones matemáticas que rigen el funcionamiento de estos elementos.
5. Los tipos de ondas que alimentan a los circuitos.
6. Concepto de Dualidad.

MAGNITUDES ELECTROMAGNÉTICAS		UNIDADES ELECTROMAGNÉTICAS (S. I.)	
Nombre	**Símbolo**	**Nombre**	**Símbolo**
Intensidad de Corriente	**i**	Amperio	**A**
Tensión	**u**	Voltio	**V**
Fuerza Electromotriz	**e**	Voltio	**V**
Potencia	**p**	Vatio	**W**
Energía	**w**	Julio	**J**
Flujo	**Φ**	Weber	**Wb**
Fuerza Magnetomotriz	**F**	Amperio Vuelta	**Amp. Vuelta**
Inducción magnética	**β**	Tesla	**T** (Wb/m)
Resistencia	**R**	Ohmio	**Ω** (V/A)
Inductancia	**L**	Herio	**H** (Wb/A)
Carga	**q**	Culombio	**C**
Capacidad	**c**	Faradio	**F** (C/V)

Magnitudes y Convenio de signos (I)

En la tabla podemos ver que **u** y **e**, se miden en voltios aunque son magnitudes distintas. Digamos que la **e** es capaz de generar corriente eléctrica (**i**), mientras que la **u** (tensión ó diferencia de potencial ó caída de tensión), se provoca al circular la **i** a través de una **R** por ejemplo. Una es causa, y otra efecto. Para la relación entre las magnitudes **e**, **i** y **u**, por lo antes dicho, tomaremos como sentido positivo de la última el que se opone al de las otras dos. En cuanto a las flechas indicadoras de **u** y de **e** (si se utilizan) se orientarán en el sentido del menos al mas, ó sea el de los potenciales crecientes (ver figura). Si estas flechas aparecen en sentido contrario al comentado, las magnitudes se tomarán como negativas.



../..

Magnitudes y Convenio de signos (II)

La intensidad de corriente positiva, cuando se desplace desde los potenciales mayores a los menores (fuera de los elementos).

La tensión positiva cuando sea superior al potencial de TIERRA.

En la diapositiva anterior la **e** lleva las cargas del – al + en la fuente, o sea aumenta su potencial, posteriormente las envía hacia R, y al atravesarla pierden el potencial que tenían (pasan en R de + a - potencial) y vuelven a **e**, repitiéndose el ciclo. Por eso:

La potencia y energía en un elemento, las tomaremos positivas cuando la reciben, y negativa cuando la generan.

El flujo. Cuando la intensidad circula por un hilo ó arrollamiento (bobinado) tomaremos como flujo positivo, aquel cuyo sentido de giro siga la regla del sacacorchos con respecto a la intensidad.

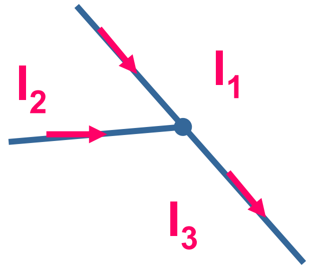
La pareja se signos (+,–) que se suele poner en los extremos de los elementos de los circuitos, indicará qué terminal está a más tensión que el otro, nunca que uno de ellos está a potencial positivo y el otro a negativo. (Suele ponerse el signo + solamente).

Leyes de Kirchhoff

Ley de intensidades de Kirchhoff (L.I.K.):

La suma algebraica de las corrientes que inciden en cualquier nudo es cero.

$$(I_1 + I_2 - I_3 = 0)$$



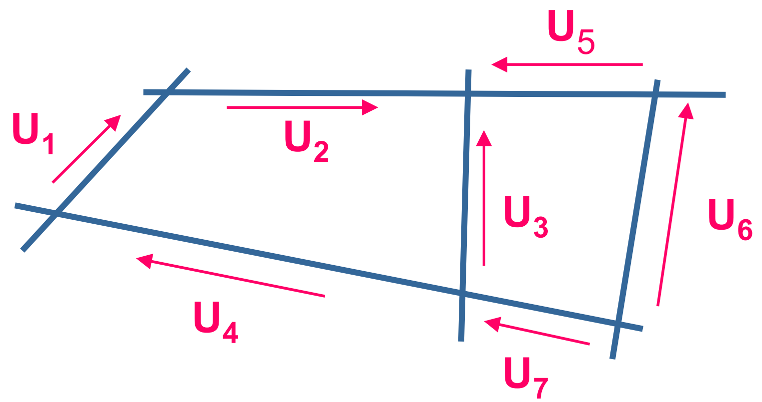
Ley de tensiones de Kirchhoff (L.T.K.):

La suma algebraica de las tensiones que aparecen en cualquier camino cerrado de un circuito es cero. Así:

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 0$$

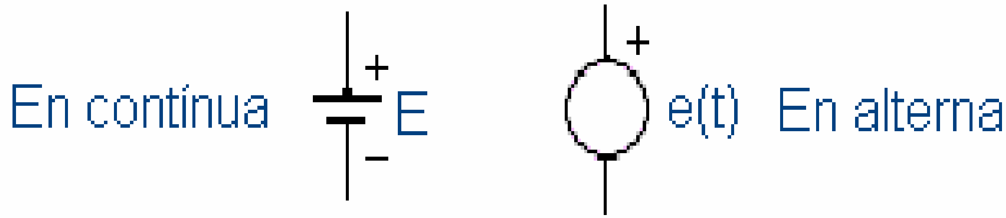
$$U_3 - U_5 - U_6 + U_7 = 0$$

$$U_1 + U_2 - U_5 - U_6 + U_7 + U_4 = 0$$

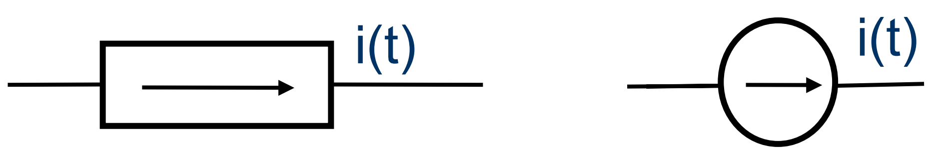


Elementos Activos (I)

Las fuentes ideales de tensión, son elementos ó circuitos, que proporcionan entre sus terminales una tensión definida por una cierta ley, por ejemplo E = Cte., e(t) = Sen wt, independientemente del circuito al que esté conectado. Simbólicamente se representan por:



Las fuentes ideales de intensidad, son elementos ó circuitos que producen una corriente definida por una cierta ley, independientemente del circuito al que estén conectadas.

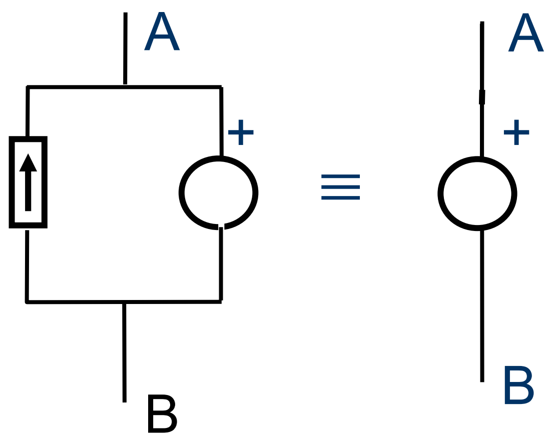


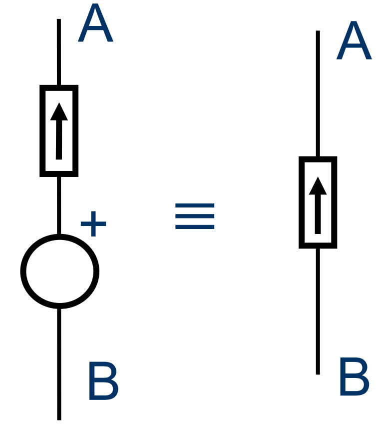
Elementos Activos (II)

Asociación de fuentes ideales de tensión en serie: $E_g = \sum_{i=1}^{n} E_i$

Asociación de fuentes ideales de intensidad en paralelo: $I_g = \sum_{i=1}^{n} E_i$

Otras asociaciones:



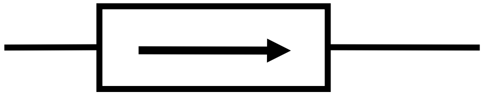


Fuentes Dependientes

Decimos que una fuente de tensión ó de intensidad, es dependiente, cuando el valor de la tensión ó intensidad que producen, depende de la tensión ó la intensidad que existe en algún punto del circuito.

Pueden ser fuentes de tensión dependientes de una tensión ó de una intensidad, o fuentes de intensidad dependientes de una tensión ó de una intensidad. Se representan con los mismos símbolos que las fuentes independientes, acompañando a estos la expresión matemática que la define. En la figura tenemos una fuente de intensidad dependiente de una tensión.

$i(t) = kU$



Una fuente dependiente puede ser un circuito, en general desconocido en su topología, impedancia, y elementos que lo forman. Lo único que necesitamos conocer es lo que hace, y eso nos lo da su expresión.

Elementos Pasivos : Resistencia (U = Ri)

En serie $R_T = \sum_{i=1}^{1=n} R_i$ E n paralelo $\frac{1}{R_T} = \sum_{i=1}^{1=n} \frac{1}{R}$

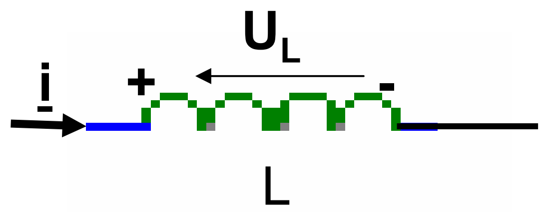
Potencia $p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t)^2 \geq 0$

Energía $w(t) = \int_{-\infty}^{t} R\, i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{t} \frac{u^2(t)}{R} dt \geq 0$

Elementos Pasivos: Bobina $U_L = L\,(di/dt)$ (I)

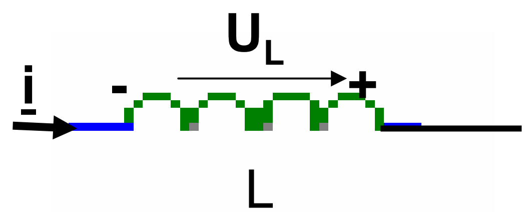
Se define la $L = \dfrac{\Phi}{I}$ siendo sus unidades $\text{Henrio} = \dfrac{\text{Weber}}{\text{Amperio}}$

a)



Si i ↑ $(di/dt) > 0$ y $U_L > 0$ Receptor (Toma W)

b)



Si i ↓ $(di/dt) < 0$ y $U_L < 0$ Fuente (Cede W)

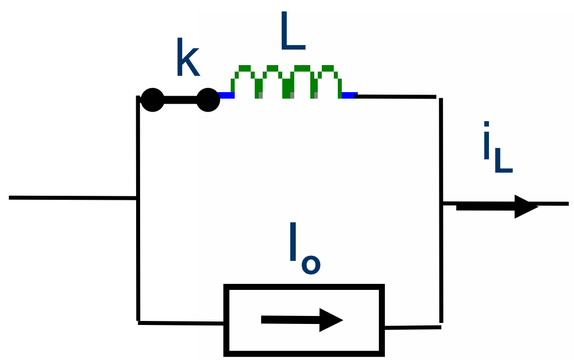
El sentido de U_L es el que cambia al actuar como receptor ó como fuente

Elementos Pasivos: Bobina $U_L = L\,(di/dt)$ (II)

Integrando en la ecuación de la cabecera y despejando la intensidad, tendremos

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(t)dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u_L(t)dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(t)dt = I_0 + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(t)dt$$

Ecuación de la que podemos obtener el modelo matemático de una bobina cargada con una intensidad I_o en el instante t =0.



Elementos Pasivos: Bobina $U = L\,(di/dt)$ (III)

En serie $L_T = \sum_{i=1}^{1=n} L_i$ En paralelo $\dfrac{1}{L_T} = \sum_{i=1}^{1=n} \dfrac{1}{L_i}$

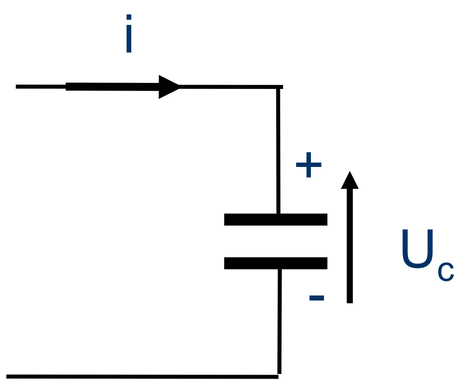
Potencia $p(t) = u(t)\cdot i(t) = L\cdot i(t)\dfrac{di(t)}{dt}$

Energía $w(t) = \dfrac{1}{2} L\cdot i(t)^2 \geq 0$

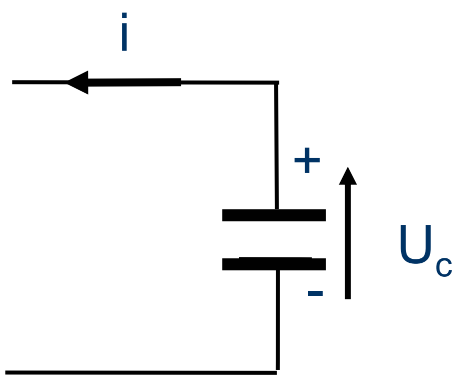
Elementos Pasivos: Condensador $i = C\,(du/dt)$ (I)

Se define la $C = \dfrac{q}{V}$ siendo sus unidades $\text{Faradio} = \dfrac{\text{Culombio}}{\text{Voltio}}$

a)



b)



Si $U_c\uparrow$ $(dU_c/dt) > 0$ la $i > 0$

Receptor (Consume W)

Si $U_c\downarrow$ $(dU_c/dt) < 0$ la $i < 0$

Fuente (Cede W al circuito)

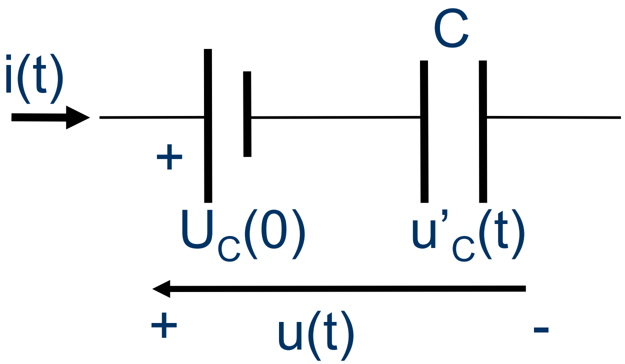
El sentido de i es el que cambia al actuar como receptor ó como fuente

Elementos Pasivos: Condensador i = C (du/dt) (II)

Integrando en la ecuación de la cabecera y despejando la tensión tendremos:

$$u(t) = u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt = U_C(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt$$

Ecuación de la que podemos obtener el modelo matemático de un condensador, supuesto que en t =0 está cargado con una tensión U_c (0).



Elementos Pasivos: Condensador i = C (du/dt) (III)

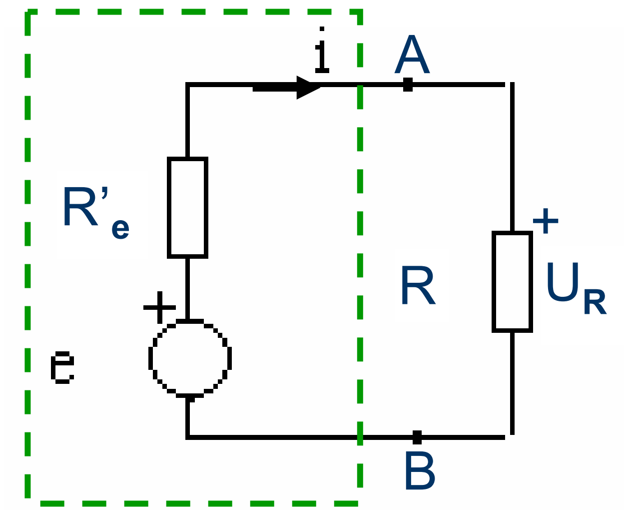
En serie $$\frac{1}{C_T} = \sum_{i=1}^{1=n} \frac{1}{C_i}$$

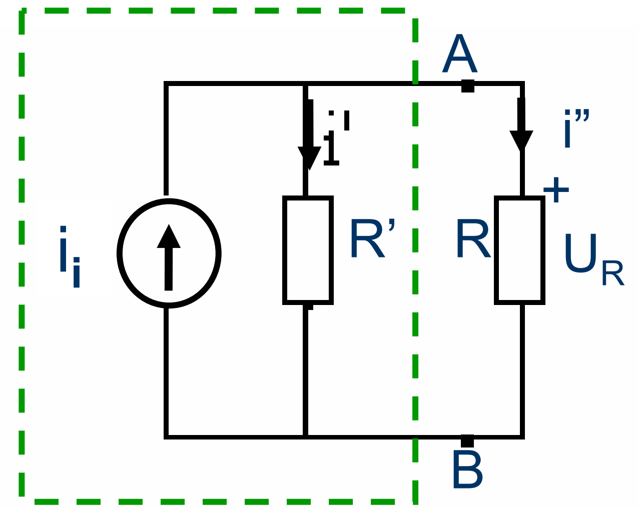
En paralelo $$C_T = \sum_{i=1}^{1=n} C_i$$

Potencia $$p(t) = C \cdot u(t) \frac{du(t)}{dt}$$

Energía $$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot u(t)^2 \geq 0$$

Fuentes de Tensión y de Intensidad Reales



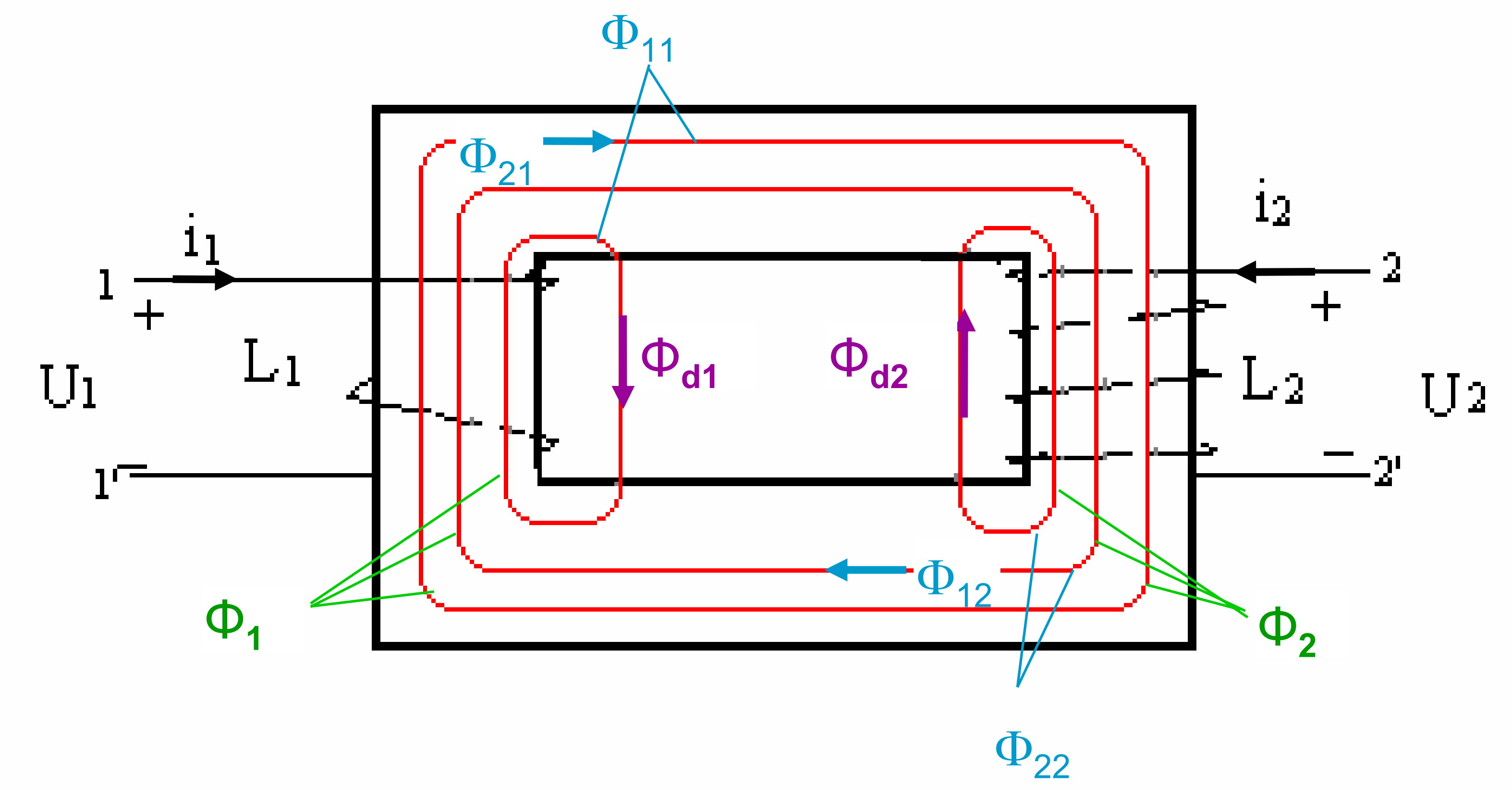


$e = R'_e\, i + Ri = (R'_e + R)i$

$i_i = i' + i''$

Para que estas fuentes sean equivalentes, se tienen que cumplir dos condiciones: $e = i_i R'$ $R'_e = R'$

Par de Bobinas Acopladas Magnéticamente (I)



Dos generadores de tensión U_1 y U_2 crean las corrientes i_1 y i_2 que originan los flujos de la figura.

Par de Bobinas Acopladas Magnéticamente (II)

Para la bobina L1:

Φ_{11} = Flujo que hay en L_1, producido por i_1

Φ_{12} = Flujo que hay en L_1, producido por i_2

Φ_{d1} = Flujo producido por i_1 y que no alcanza a L_2. (Flujo de dispersión)

Φ_{1} = Flujo total de L_1

Para la bobina L2:

Φ_{22} = Flujo que hay en L_2, producido por i_2

Φ_{21} = Flujo que hay en L_2, producido por i_1

Φ_{d2} = Flujo producido por i_2 y que no alcanza a L_1. (Flujo de dispersión)

Φ_{2} = Flujo total de L_2

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = \Phi_{d1} + \Phi_{21} + \Phi_{12}\\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{21} = \Phi_{d2} + \Phi_{12} + \Phi_{21}\end{aligned}}$$

Par de Bobinas Acopladas Magnéticamente (III)

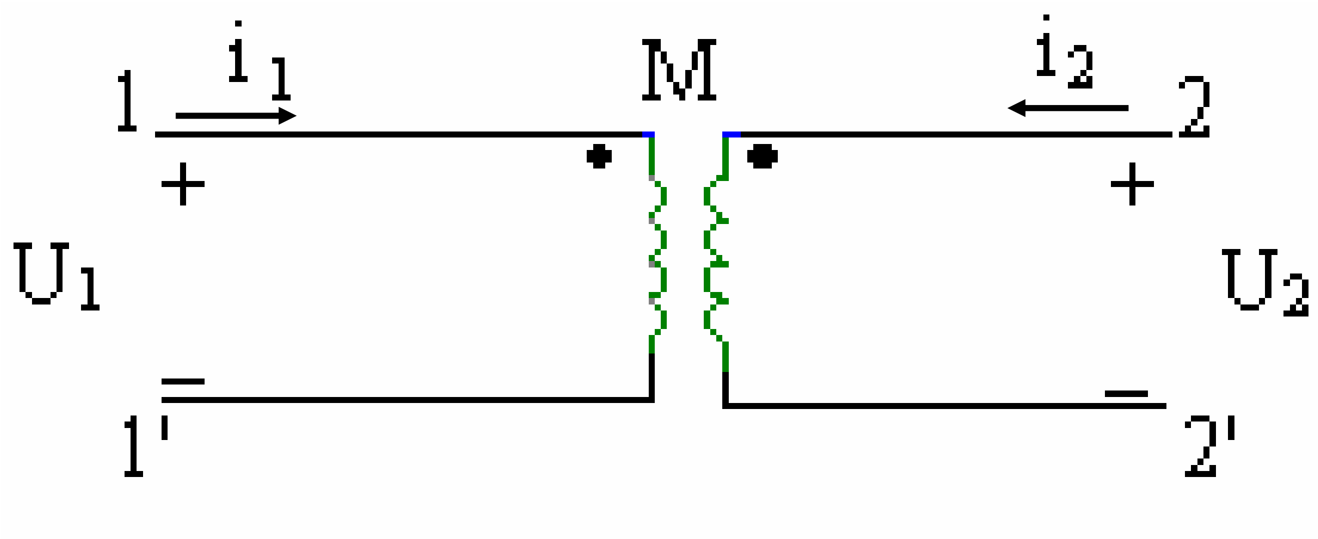
Terminales Correspondientes son aquellos por lo que si entran las corrientes, estas originan flujos con el mismo sentido de circulación.(O sea, flujos que se suman).Por ejemplo, son terminales correspondientes los 1 y 2. También 1'y 2'. Se indican mediante símbolos como puntos, triángulos, asteriscos, cuadrados, etc. Estos símbolos se utilizan para indicar de forma sencilla (sin tener que dibujar detalladamente los arrollamientos) cuando se suman ó restan los flujos.

Coeficiente de Inducción Mutua M_{12} de la bobina 1 con la 2, es el cociente entre el flujo que aparece en la L_1 creado por la L_2, y la corriente i_2, y multiplicado por el número de espiras de la bobina 1 (N_1).

$$M_{12}=(\Phi_{12}/i_2)N_1 \qquad M_{12}= K\sqrt{L_1L_2}$$

(Coeficiente de acoplamiento $K = \sqrt{K_1 K_2}$ con $K_1 = \dfrac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$)

Par de Bobinas Acopladas Magnéticamente (IV)



$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{di_1}\frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2}\frac{di_2}{dt} = L_1 Di_1 + M_{12} Di_2$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{di_2}\frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_{21}}{di_1}\frac{di_1}{dt} = L_2 Di_2 + M_{21} Di_1$$

Tipos de Ondas Eléctricas

Ondas aperiódicas:

Función rampa, función escalón, impulso unitario…

Ondas periódicas:

En una onda periódica, definimos los siguientes parámetros:

Valor Instantáneo, Valor de Pico ó de Cresta, Valor de Pico a Pico, Valor Medio, Valor Eficaz, Factor de Cresta (Fc), Factor de Rizado (r), Factor de Forma (F).

$$F_c = \frac{V\ \text{cresta}}{V\ \text{eficaz}} \qquad r = \frac{V_e\,(\text{componente alterna})}{V_m\,(\text{componente continua})}$$

$$F = \frac{V_e\,(\text{de la onda total})}{V_m\,(\text{componente continua})} \qquad r = \sqrt{F^2 - 1}$$

Dualidad

Las fórmulas para el condensador guardan un paralelismo, o mas exactamente una dualidad, con respecto a las expuesta para las inductancias.

Solo hay que cambiar tensión por intensidad, (ó intensidad por tensión), L por C (ó C por L) y serie por paralelo (ó paralelo por serie), y pasamos de las fórmulas de L a las de C.

Dicho de otra forma, lo que le pasa a la intensidad (tensión) en las bobinas, le pasa a la tensión (intensidad) en los condensadores.

De forma mas generalizada, este concepto se extiende al resto de la teoría de circuitos en la siguiente diapositiva.

.. /..

Magnitudes duales:

intensidad	dual	de	tensión
inductancia	"	"	capacidad
flujo	"	"	carga

Elementos duales:

R	dual	de	G =1/R
L	"	"	C
Z	"	"	Y

Leyes y ecuaciones duales:

(LIK) Σ i = 0	dual	de	(LTK) Σ u = 0
u_L=L(di/dt)	"	"	i_C=C(du/dt
U = ZI	"	"	I = YU

Configuraciones duales:

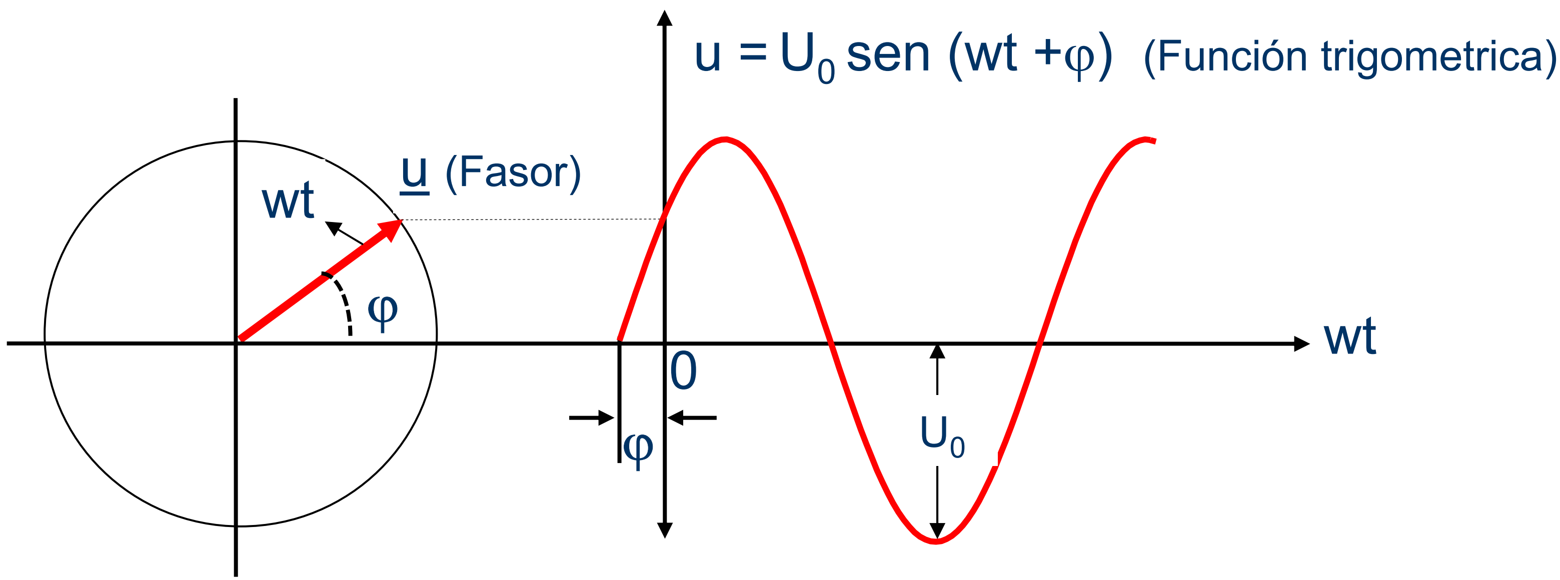
nudo	dual	de	malla
asociac. Paralelo	"	"	asociac. serie
cortocircuito	"	"	circuito abierto
fuente de tensión	"	"	fuente de intens.
conex. estrella	"	"	conex. triángulo

TEMA 2.- Sistemas Monofásicos.

En este tema estudiaremos:

1. Como se comportan los circuitos monofásicos y sus elementos al alimentarlos con ondas senoidales.
2. Veremos la relación que hay entre un fasor y la onda senoidal, y la simplificación matemática que se obtiene al trabajar con fasores y en el campo complejo.
3. Estudiaremos el concepto de impedancia de un circuito, y veremos las distintas ondas de tensión y corriente que aparecen en los circuitos.
4. Veremos que los distintos tipos de potencias, estan asociados a los distintos elementos pasivos, y como evoluciona la energía en ellos.
5. Estudiaremos los fenómenos que se producen al entrar en resonancia un circuito.

Régimen Senoidal (I)



La proyección sobre el eje vertical del vector giratorio, coincide en el tiempo con la expresión trigonométrica. Este hecho relaciona una onda senoidal con un fasor.

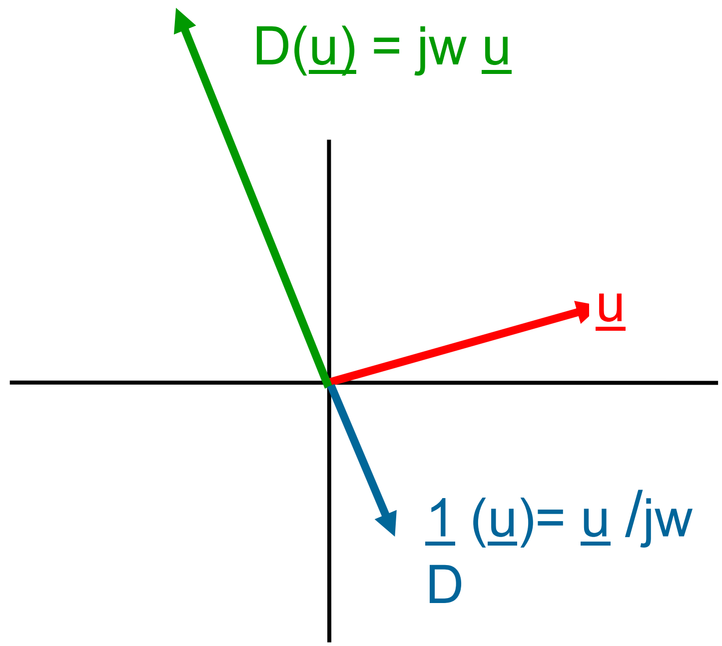
Para representar un fasor (vector giratorio) tomaremos para su módulo el valor eficaz U de la onda senoidal, y para su argumento, el valor del ángulo en el instante t =0 (φ), o sea $\underline{u} = U_{(\varphi}$

Régimen Senoidal (II)

Una onda senoidal $u = U_0 \mathrm{Sen}(wt + \varphi)$ tiene de:

- Valor de pico $V_P = U_0 \qquad V_{PP} = 2U_0$
- Valor Medio: $U_m = \dfrac{1}{T/2}\int_0^{T/2} U_0 \mathrm{Sen}(wt+\varphi)dt = \dfrac{2U_0}{\pi}$
- Valor Eficaz: $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^{T} U_0^2 \mathrm{Sen}^2(wt+\varphi)dt} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$
- Expresada como fasor $\underline{u} = U\angle\varphi \quad (\varphi \text{ desfase entre } u, i)$
- $\dfrac{d}{dt}(\mathrm{Sen}\, wt) = w\mathrm{Cos}\, wt = w\mathrm{Sen}(wt + \dfrac{\pi}{2})$
- $\int \mathrm{Senwt}\, dt = \dfrac{-1}{w}\mathrm{Cos}\, wt = \dfrac{1}{w}\mathrm{Sen}\,(wt - \dfrac{\pi}{2})$

Régimen Senoidal (III)



La derivada del fasor u es otro fasor adelantado en 90º y multiplicado por la pulsación w.

La integral del fasor u es otro fasor retrasado en 90º y dividido por la pulsación w.

Régimen Senoidal (IV)

En un circuito alimentado con una onda senoidal los elementos pasivos presenta una impedancia (en Ω), cuyas expresiones son:

La impedancia de: Una resistencia es R

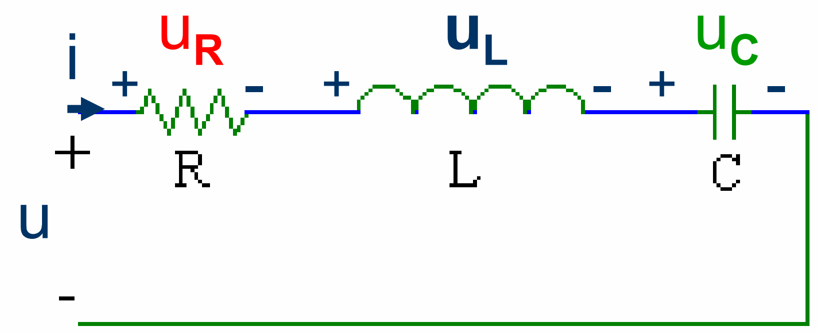
Una bobina es $jwL = jX_L$

Un condensador es $-j / wC = jX_C$

(La pulsación $w = 2\pi f$)

Régimen Senoidal (V)

Circuito serie RLC recorrido por $i = I_0$ Sen wt



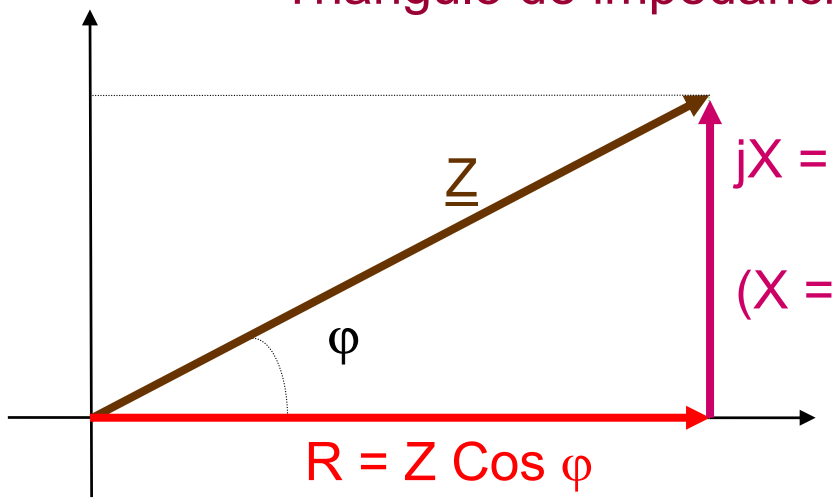
Para valores instantáneos y fasoriales se cumple que:

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Esta expresión no se cumple con valores eficaces.

Régimen Senoidal (VI)

Triángulo de impedancias



Impedancia del circuito: $\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L + X_C) = R + j(wL - \frac{1}{wC}) = Z_{(\varphi}$

Su módulo $Z = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}$ Su argumento $\varphi = \text{Arc tg} \frac{(wL - \frac{1}{wC})}{R}$

Régimen Senoidal (VII)

En el circuito serie RLC, las relaciones entre las tensiones y la corriente senoidal del circuito $i = I_0$ Sen wt (como fasor será $\underline{i} = I_{(0}$) son:

$$\underline{u}_{\mathbf{R}} = R\,\underline{i} = RI_{\mathbf{(0}}$$

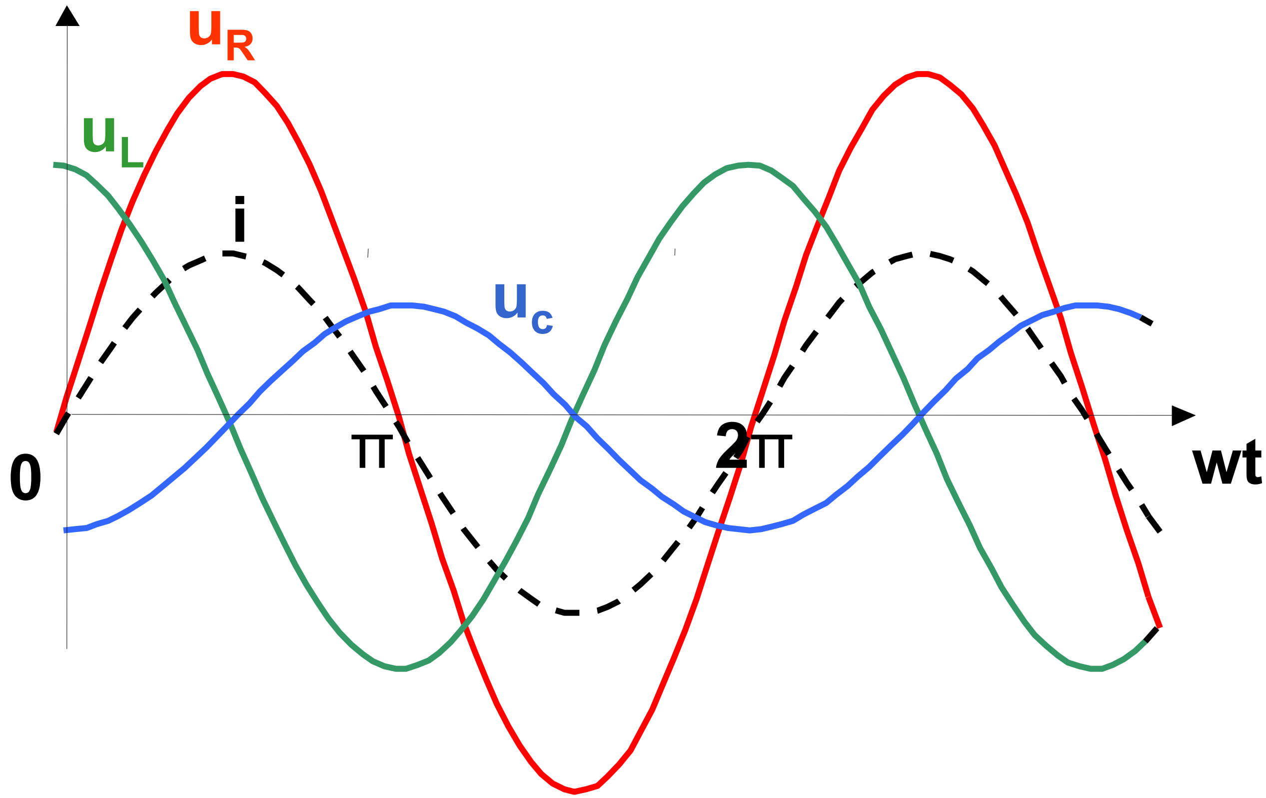
$$\underline{u}_{\mathbf{L}} = jwL\,\underline{i} = wLI_{\mathbf{(\pi/2}}$$

$$\underline{u}_{\mathbf{C}} = j(-1/wC)\,\underline{i} = (1/wC)\,I_{\mathbf{(-\pi/2}}$$

$$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} = ZI_{\mathbf{(\varphi}}$$

Sus gráficas aparecen en la siguiente transparencia.

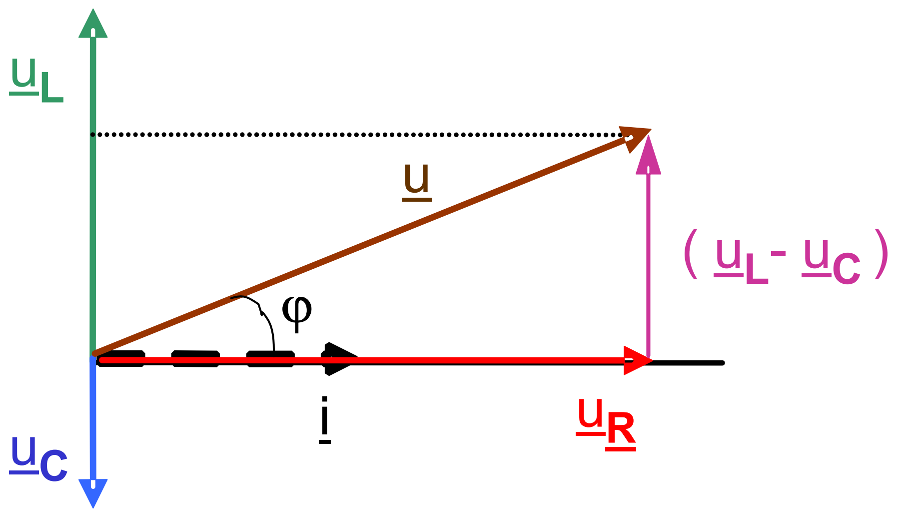
Régimen Senoidal (VIII)



Ondas de tensión y corriente del circuito RLC serie

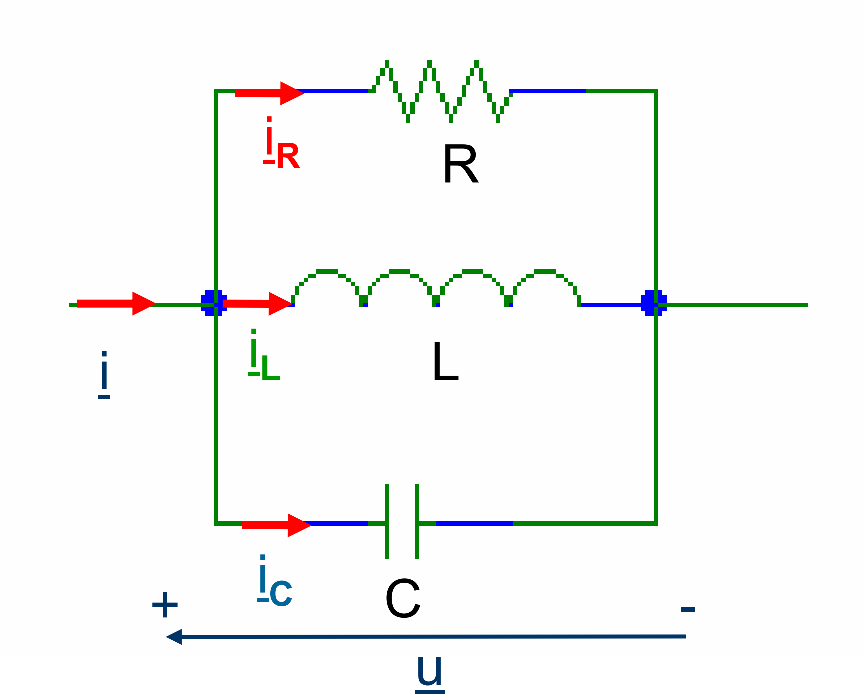
Régimen Senoidal (IX)

Diagrama Fasorial del circuito serie RLC



Régimen Senoidal (X)

Circuito paralelo RLC alimentado con una $u = U_0$ Sen wt

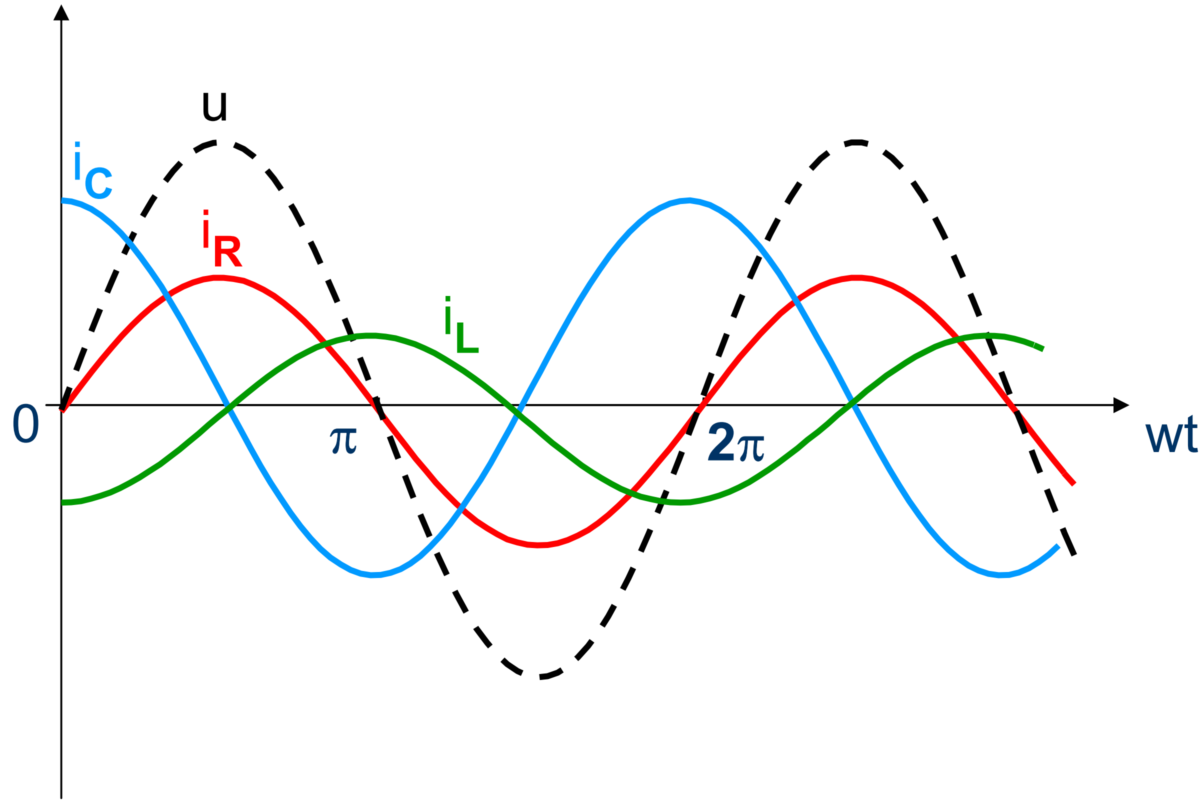


Para valores instantáneos y fasoriales (no para valores eficaces) se cumple que:

$$i = i_R + i_L + i_C = u/R + u/jX_L + u/jX_C$$

Régimen Senoidal (XI)

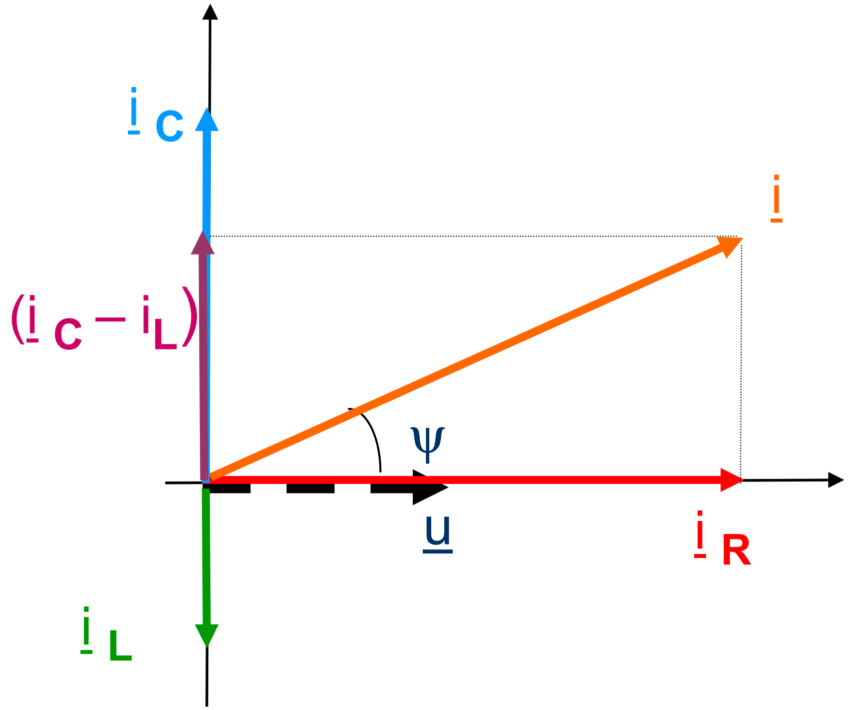
Circuito paralelo RLC alimentado con una $u = U_0$ Sen wt



$$i = (U_0/R) \text{ sen } wt + wCU_0 \text{ sen } (wt + \pi/2) + (U_0/wL) \text{ sen } (wt - \pi/2)$$

Régimen Senoidal (XII)

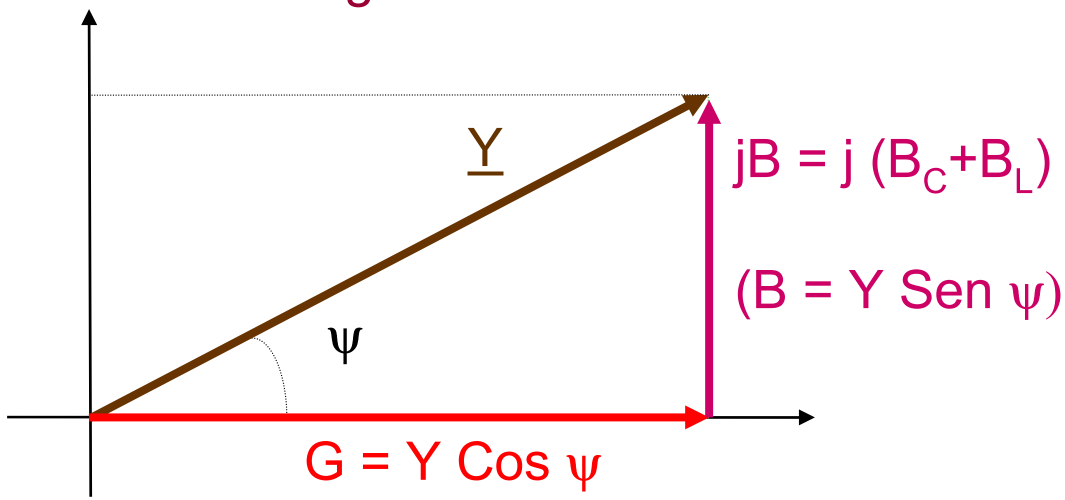
Diagrama fasorial del circuito paralelo RLC



$$\underline{i} = U/R_{(0} + wCU_{(\pi/2} + U/wL_{(-\pi/2}$$

Régimen Senoidal (XIII)

Triángulo de admitancias



La admitancia del circuito $\underline{Y} = G + jB = G + j(B_C + B_L) = G + j(wC - \frac{1}{wL})$

Su módulo $Y = \sqrt{G^2 + (wC - \frac{1}{wL})^2}$ Su argumento $\psi = \text{Arc tg} \frac{(wC - \frac{1}{wL})}{G}$

Se cumple que $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$

Régimen Senoidal

Potencia instantánea, media y fluctuante (I)

Supongamos un circuito con una impedancia $\underline{\underline{Z}} = Z_{(\varphi}$ por el que circula una intensidad $i(t) = I_0 Sen\ wt = \sqrt{2} ISen\ wt$, en él aparecerá una tensión $u(t) = \sqrt{2}\ USen(wt + \varphi)$.

Se define la potencia instantánea p(t):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2UISen(wt + \varphi) \cdot Sen\ wt = UICos\varphi\ - UICos(2wt + \varphi) = P_m + P_f$$

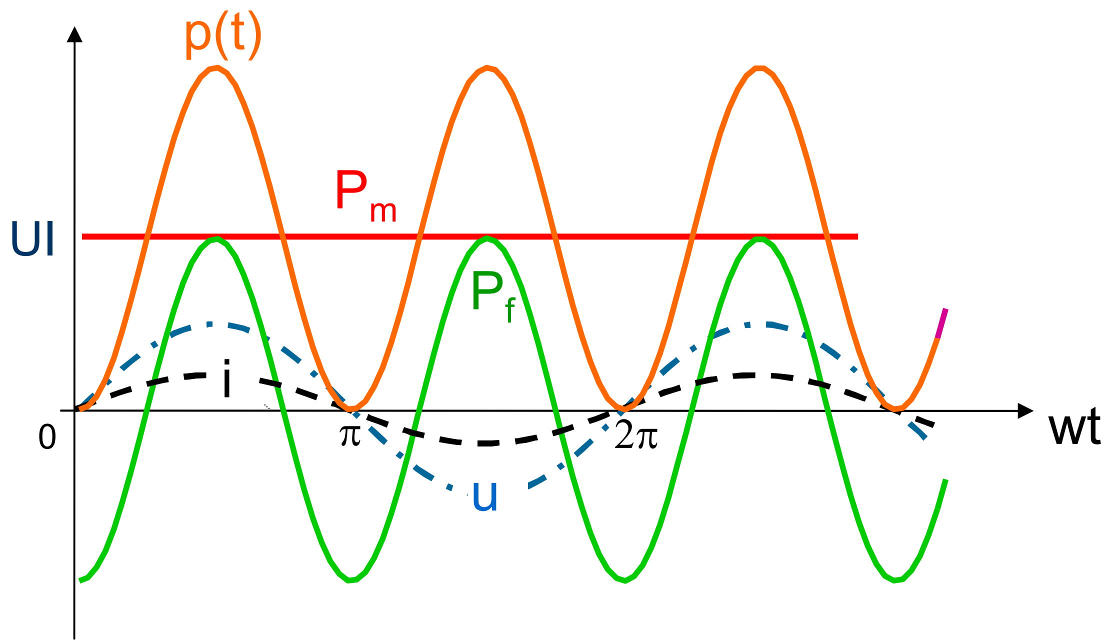
Estos dos últimos términos se designan como Potencia media P_m y Potencia fluctuante P_f

Veamos las gráficas de estas potencias para distintos valores de la impedancia del circuito.

Régimen Senoidal

Potencia instantánea, media y fluctuante (II)

Para φ =0º (Caso de una Resistencia pura)

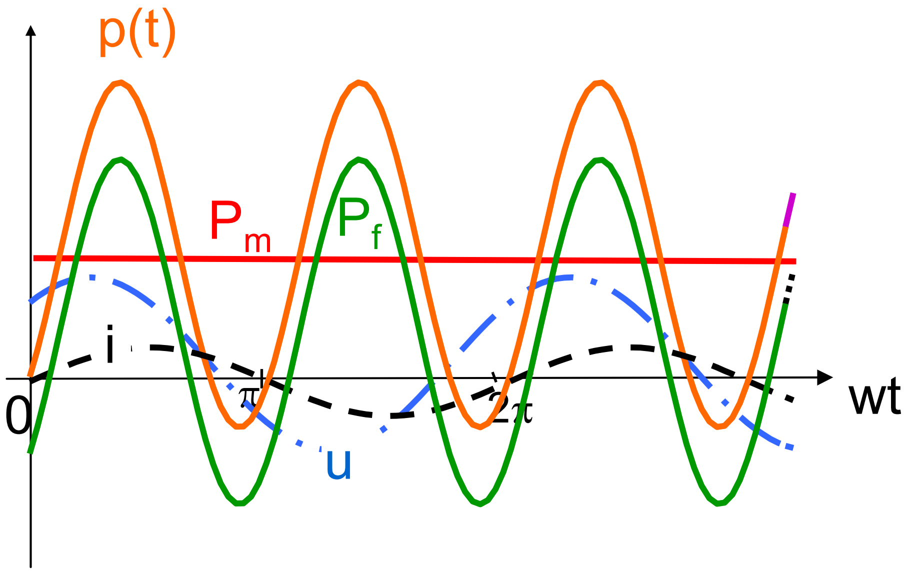


En ningún momento la potencia instantánea p(t) es negativa, es decir, el circuito no devuelve potencia a la red, toda la que recibe la consume.

Régimen Senoidal

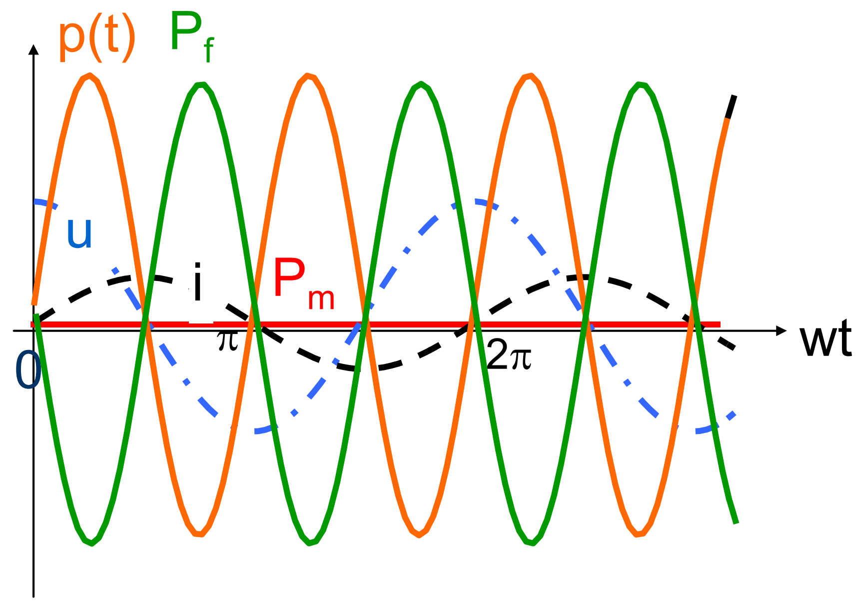
Potencia instantánea, media y fluctuante (III)

Para φ = 30º (Un circuito R-L)



Cuando la p(t) es negativa el circuito devuelve potencia a la red.

Para φ = 90º (Una Inductancia)

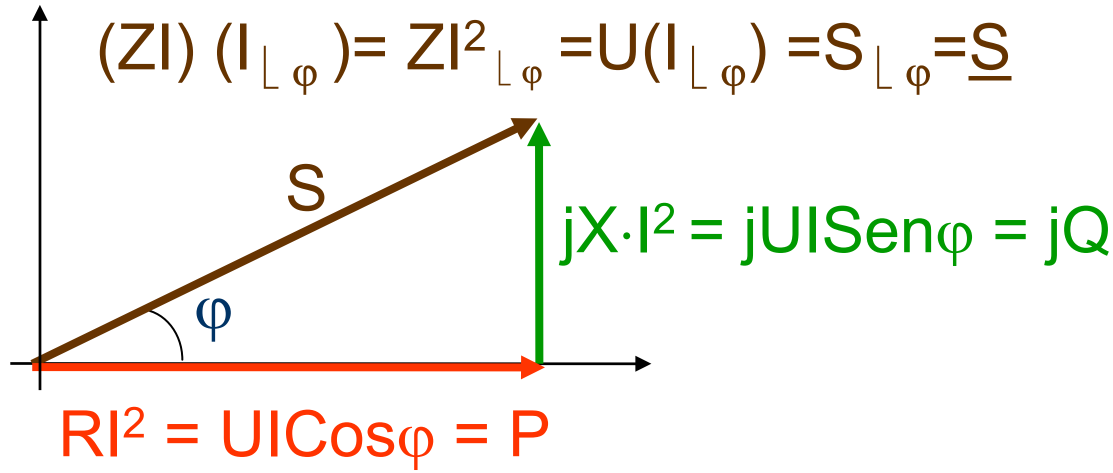


Con φ = 90º el circuito, no consume potencia (Pm = 0), solo hay fluctuante y de doble pulsación.

Régimen Senoidal

Triángulo de potencias

$(ZI)\,(I\llcorner\varphi) = ZI^2\llcorner\varphi = U(I\llcorner\varphi) = S\llcorner\varphi = \underline{S}$



Potencia activa	$P = UICos\varphi$	[W]
Potencia reactiva	$Q = UISen\varphi$	[VAr]
Potencia aparente	$S = UI$	[VA]
Potencia compleja	$\underline{S} = P + jQ = UI(Cos\varphi + jSen\varphi) = \underline{U}\mathbf{x}\underline{I}^*$	

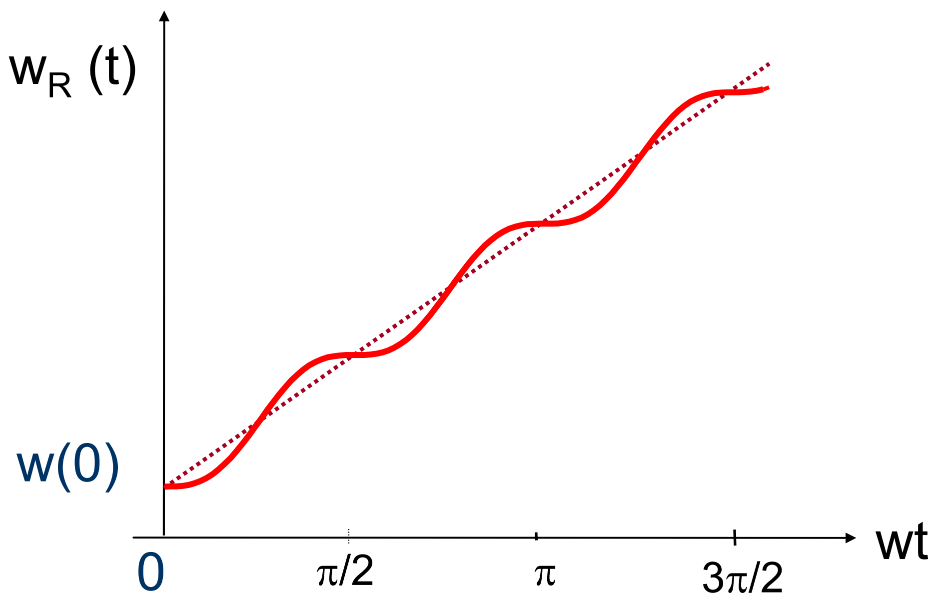
$P = S\,Cos\varphi \qquad Q = S\,Sen\varphi$

Régimen Senoidal

Energía en resistencias, bobinas y condensadores (I)

Aplicando las expresiones ya vistas de la energía para los elementos pasivos, y considerando que la $i(t) = \sqrt{2}\, I\mathrm{Sen}\, wt$, tendremos

$$w(t)= W(0) +(UI/w)(wt-0{,}5\mathrm{Sen}\, 2wt)$$

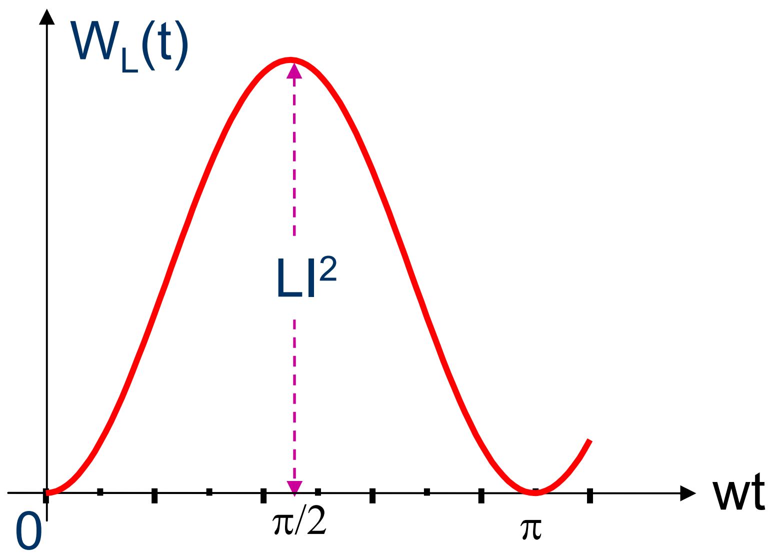


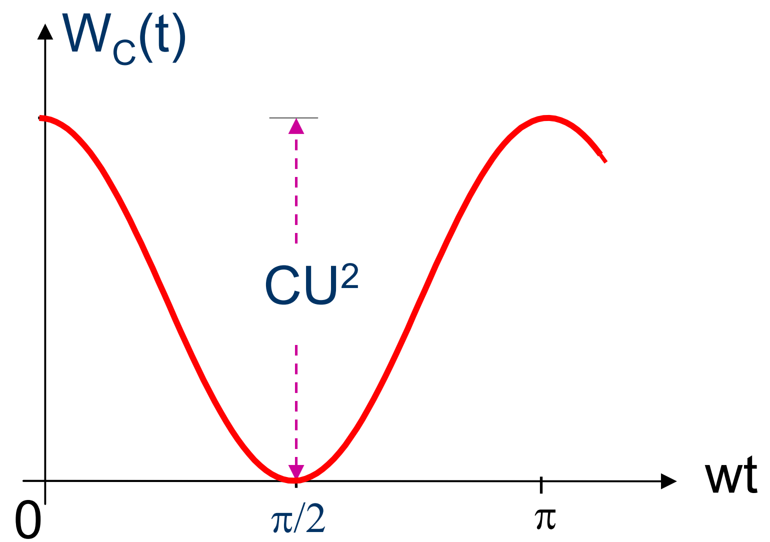
Régimen Senoidal

Energía en resistencias, bobinas y condensadores (II)

Para una inductancia $w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LI^2(1 - \cos 2wt)$

Para un condensador $w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} CU^2(1 + \cos 2wt)$, cuyas gráficas son:





En el tiempo, cuando la energía que acumula la L es máxima, en el C es mínima.

Régimen Senoidal

Resonancia de un Circuito Serie (I)

La impedancia de un circuito serie RLC es:

$$\underline{Z} = R + j(X_L + X_C) = R + j(wL-1/wC)$$

Definimos la pulsación de resonancia w_0 aquella en la que la impedancia se hace mínima, y en este caso es la que hace que la parte imaginaria del circuito sea nula , luego se tendrá que cumplir que:

$$w_0 L = \frac{1}{w_0 C} \quad \text{es decir} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(Rad/seg)}$$

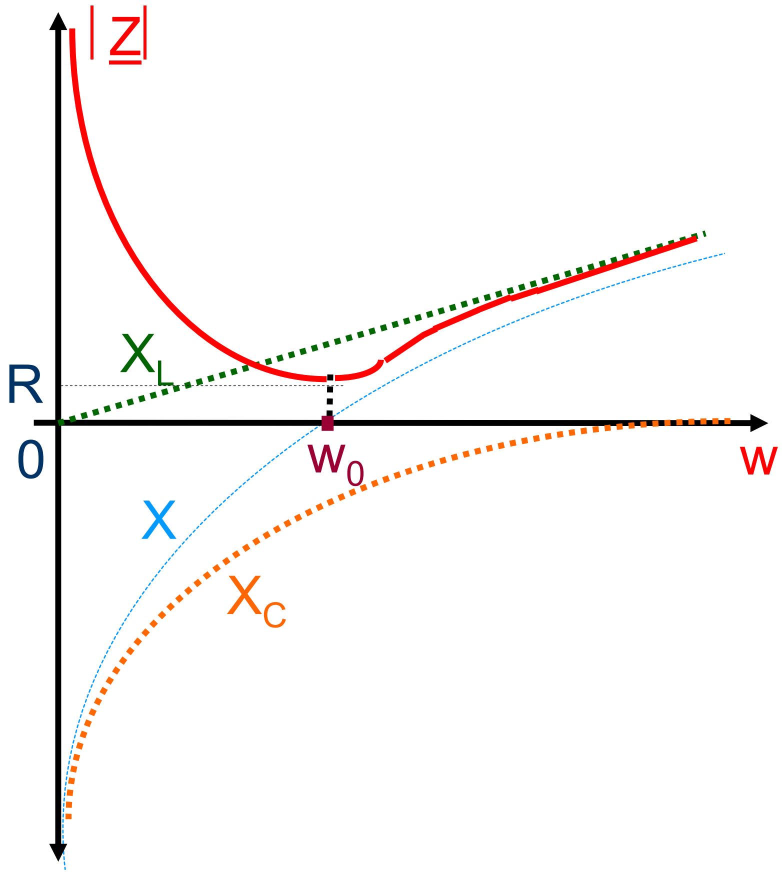
La frecuencia de resonancia será: $$f_0 = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}} \quad \text{(Hz)}$$

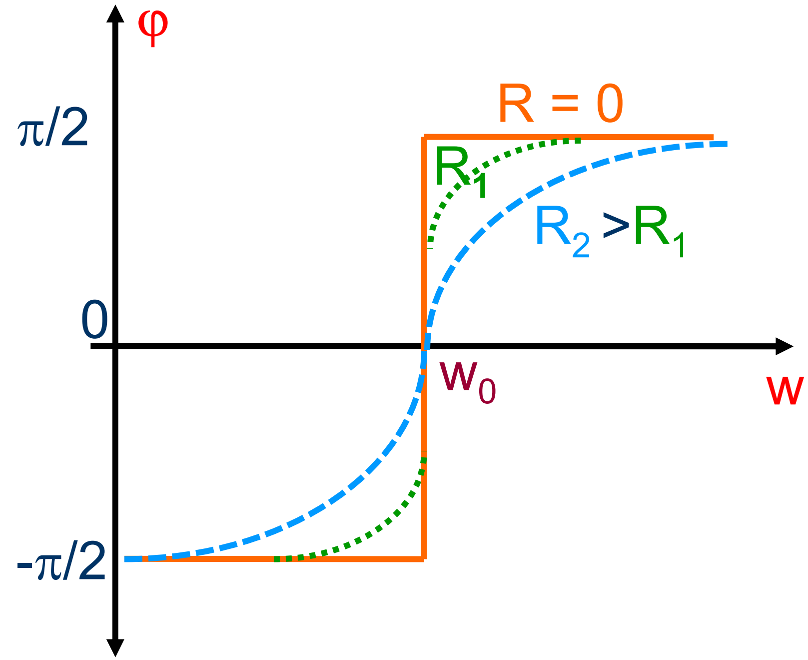
Las expresiones del módulo y argumento de $\underline{Z}$ son en función de w:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} \qquad \varphi = \text{Arc tg} \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}$$

Régimen Senoidal

Resonancia de un Circuito Serie (II)





Gráficas de Z y de φ en función de w

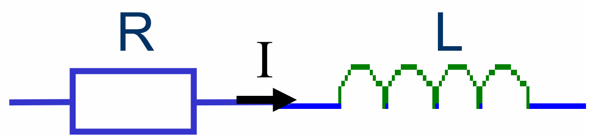
Régimen Senoidal

Resonancia de un Circuito Serie (III)

Se define el coeficiente de calidad Q de un circuito como:

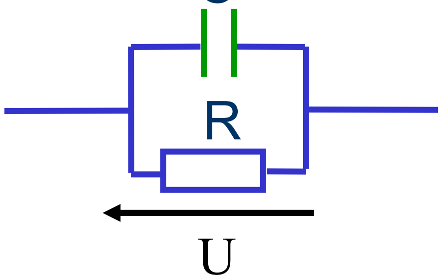
$$Q = \frac{w \cdot \text{Energía máxima almacenada}}{\text{Potencia media disipada}}$$

Coeficiente de calidad de una bobina



$$Q = w\frac{\frac{1}{2}LI_0^2}{RI^2} = (I_0 = \sqrt{2}\,I) = \frac{wL}{R}$$

Coeficiente de calidad de un condensador



$$Q = w\frac{\frac{1}{2}CU_0^2}{RI^2} = (U_0 = \sqrt{2}\,U,\ U = RI) = \frac{wC}{1/R} = wRC$$

Régimen Senoidal

Resonancia de un Circuito Serie (IV)

Supongamos un circuito serie RLC recorrido por una corriente $i = I_0 \mathrm{Sen}\, wt$. Vamos a calcular, cuando entra en resonancia, ó sea a la pulsación w_0, su energía y su factor de calidad Q_0. En la bobina se almacena una energía $W_L = ½\, Li^2 = ½\, LI_0^2\, \mathrm{Sen}^2\, wt$, y en el condensador la $W_C = ½\, Cu_C^2 = I_0^2/2Cw^2\mathrm{Cos}^2\, wt$, como se ve, variables con el tiempo.

La energía en el circuito es $W_T = W_L + W_C$. En resonancia se cumple que $L = 1/(w^2C)$, luego la

$$W_T = CU_0^2/2 = LI_0^2/2$$

La energía almacenada en todo el circuito es la máxima que puede almacenar la bobina ó el condensador, (que coinciden al estar en resonancia) y es constante en el tiempo. El factor de calidad es:

$$Q_0 = w_0 \frac{\frac{1}{2}LI_0^2}{RI^2} = \frac{w_0 L}{R} = \frac{1}{w_0 RC}$$

Régimen Senoidal

Resonancia de un Circuito Paralelo

La admitancia del circuito RLC paralelo es $\underline{Y} = 1/R + j(wC-1/wL)$. Diremos que el circuito está en resonancia (antirresonancia), cuando se cumple que la parte imaginaria se anula, o sea cuando $wC = 1/wL$. Por tanto en resonancia, la admitancia del circuito se hace mínima (la impedancia máxima). La pulsación y la frecuencia de resonancia, por tanto, toman la misma expresión que en el circuito serie anterior.

Se puede realizar el estudio de la resonancia del circuito paralelo, si aplicamos, a las fórmulas del circuito serie, lo visto en Dualidad.

TEMA 3.- Métodos de Análisis de Circuitos. Teoremas.

Los distintos Métodos de análisis de circuitos, nos indican como se pueden aplicar de forma "metódica" las leyes de Kirchhoff, con el objeto de obtener un número mínimo de ecuaciones que permitan su resolución. En este tema expondremos los pasos que hay que dar para, según sea el método a utilizar (lazos, mallas ó nudos) como se pueden construir esas ecuaciones de forma directa, es decir, simplemente por observación del circuito, sin necesidad de aplicar Kirchhoff.

Por otra parte, en este tema, se exponen algunos teoremas útiles para la resolución de los circuitos. Con el estudio de los teoremas buscamos, no obtener todas las corrientes o tensiones del circuito como con los Métodos, sino solo alguna en concreto, o también, disponer de una herramienta para poder simplificar la topología de del circuito, incluso reduciéndolo al máximo posible, a una fuente y una impedancia.

MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Rama.- Es todo elemento ó conjunto de elementos que están conectados al resto del circuito por dos terminales.

Nudo.- Es la unión de dos o más ramas.

Lazo.- Es un conjunto de ramas que forman un camino cerrado.

Malla.- Es un lazo que no contiene ramas en su interior $r = m + n - 1$.

Árbol.- Es cualquier conjunto de ramas que no forma un camino cerrado y que contiene a todos los nudos del circuito. Todo árbol tendrá $n - 1$ ramas.

Eslabón.- Es una rama del circuito que no forma parte del árbol.
$e = r - (n - 1)$.

Lazo básico.- Una vez definido el árbol, se define un lazo básico como un lazo formado por un eslabón y el resto ramas del árbol, por tanto habrá tantos lazos básicos como eslabones, ó sea: $L_b = r - n + 1$.

Método del árbol de los lazos básicos (I)

Escritura directa de las ecuaciones.

1.- Convertimos todas las fuentes, a fuentes de tensión.
2.- Definimos un árbol en el circuito.
3.- A partir de los eslabones definimos los lazos básicos.
4.- Asignamos a cada lazo básico una corriente de lazo con un sentido cualquiera, y empezamos a construir las matrices de la ecuación

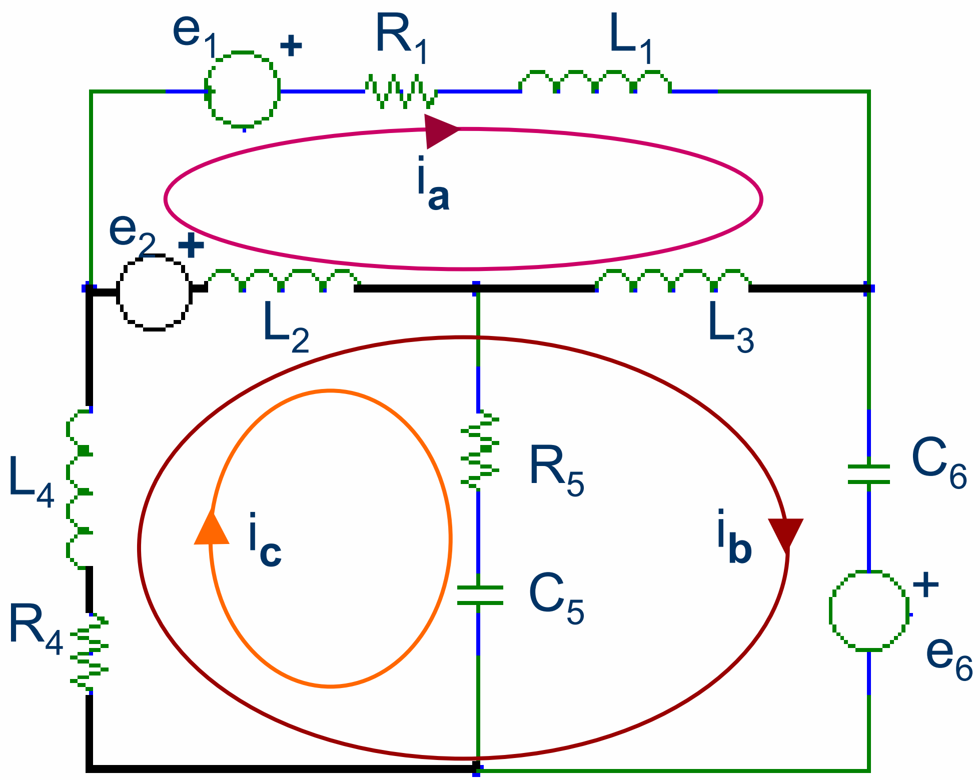
$$[e_L] = [Z_L][i_L]$$

$[e_L]$ es una matriz columna cuyos elementos recogen las fuentes de tensión de los lazos, y serán positivas las fuentes que tengan igual sentido que las intensidades de lazo.

$[Z_L]$ es una matriz cuadrada. Los elementos de la diagonal principal Zii representan las impedancias de cada lazo, y siempre son positivos. Los elementos Zij recogen los elementos comunes a los lazos i y j, con signo + cuando las corrientes de los lazos i y j los recorren con el mismo sentido, y con signo - cuando los recorren con sentido contrario.

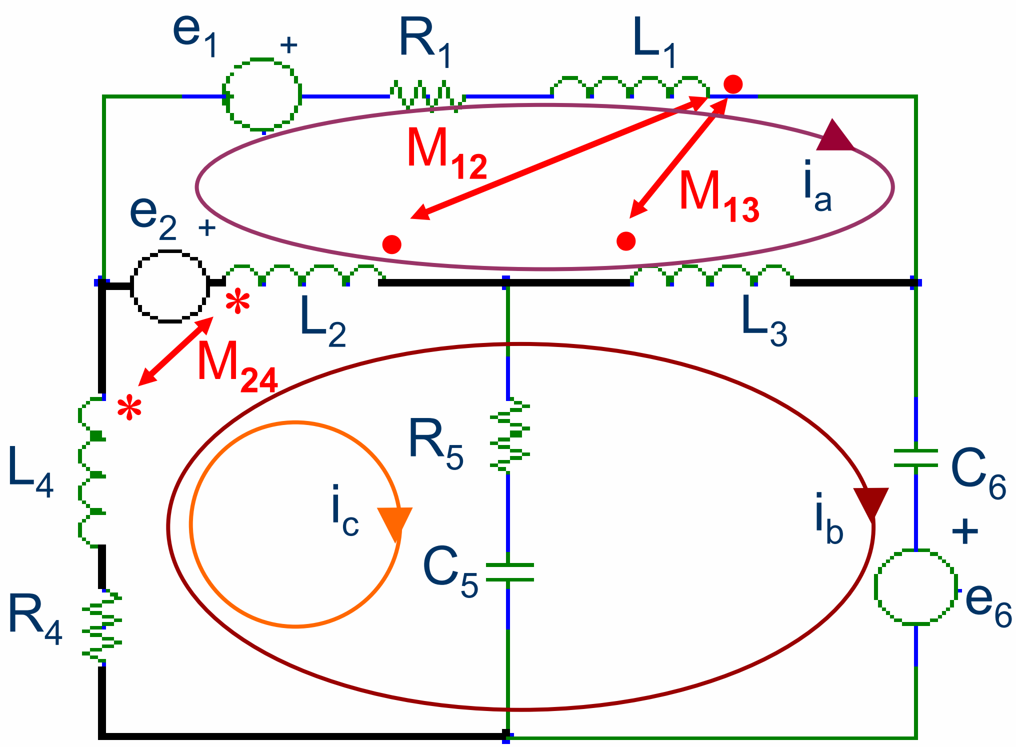
$[i_L]$ recoge las intensidades de los lazos, son las incognitas a calcular.

Método del árbol de los lazos básicos (II)



$$\begin{vmatrix} e_1-e_2 \\ e_2-e_6 \\ e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1+(L_1+L_2+L_3)D & (-L_2-L_3)D & -L_2D \\ (-L_2-L_3)D & R_4+1/C_6D+(L_2+L_3+L_4)D & R_4+(L_2+L_4)D \\ -L_2D & R_4+(L_2+L_4)D & R_4+R_5+1/C_5D+(L_2+L_4)D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

Método del árbol de los lazos básicos (III)



$$\begin{vmatrix} R_1+(L_1+L_2+L_3+2M_{13}-2M_{12})D & (-L_2-L_3+M_{12}-M_{13}+M_{24})D & (-L_2+M_{12}+M_{24})D \\ (-L_2-L_3+M_{12}-M_{13}+M_{24})D & R_4+1/C_6D+(L_2+L_3+L_4-2M_{24})D & R_4+(L_2+L_{43}-2M_{24})D \\ (-L_2+M_{12}+M_{24})D & R_4+(L_2+L_4-2M_{24})D & R_4+R_5+1/C_5D+(L_2+L_4-2M_{24})D \end{vmatrix}$$

Método de las mallas (I)

Escritura directa de las ecuaciones.

1.- Convertimos todas las fuentes de intensidad a fuentes de tensión.

2.- Definimos las mallas del circuito, asignándoles unas corrientes ficticias (corrientes de malla), y que son las incógnitas a calcular.

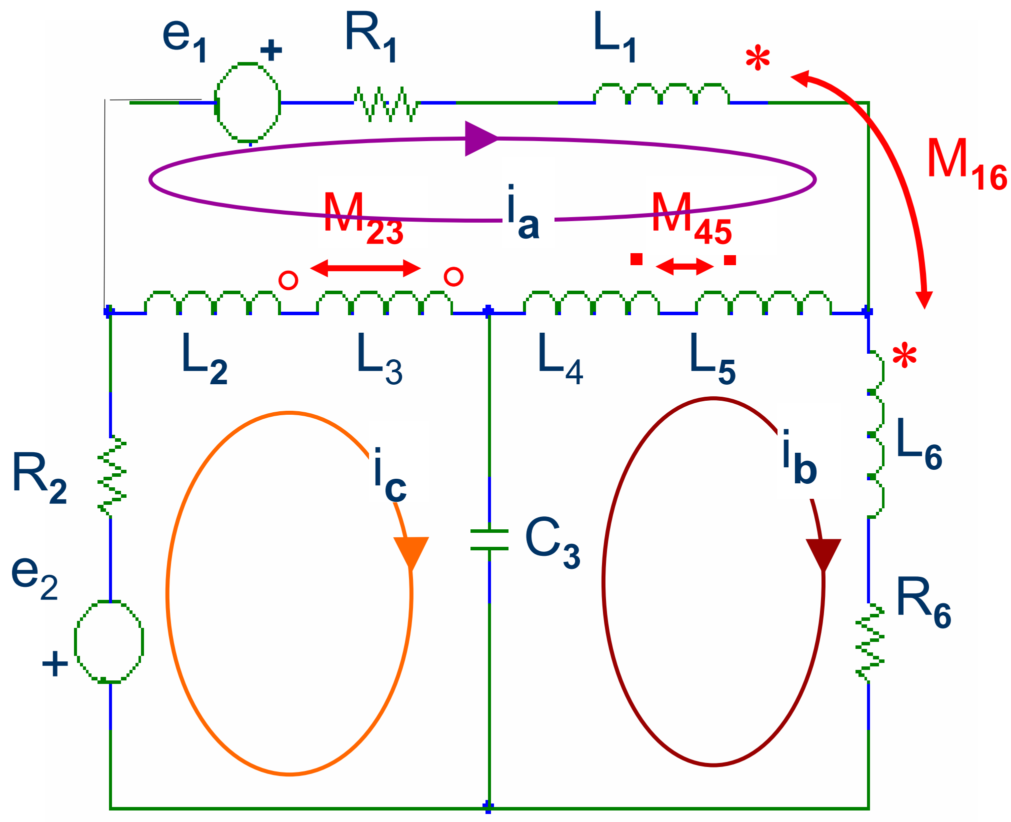
3.- Construimos las matrices de la ecuación del método: $[e_m] = [Z_m][i_m]$

$[e_m]$ es una matriz columna cuyos elementos recogen las fuentes de tensión de las mallas, y serán positivas las fuentes que tengan igual sentido que las intensidades de malla.

$[Z_m]$ es una matriz cuadrada y los elementos de la diagonal principal Zii representan las impedancias de cada malla, y siempre son positivos. Los elementos Zij recogen los elementos comunes a las mallas i y j, con signo + cuando las corrientes de las mallas i y j los recorren con el mismo sentido, y con signo - cuando los recorren con sentido contrario.

$[i_m]$ recoge las intensidades de las mallas, son las incognitas a calcular.

Método de las mallas (II)



…/…

Método de las mallas (III)

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$[e_m] = \begin{vmatrix} e_1 \\ 0 \\ -e_2 \end{vmatrix} \qquad [i_m] = \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

$$[Z_m] = \begin{vmatrix} R_1+(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5-2M_{45}+2M_{23})D & (-L_4-L_5+2M_{45}-M_{16})D & (-L_2-L_3-2M_{23})D \\ (-L_4-L_{5+}2M_{45}-M_{16})D & R_6+1/C_3D+(L_4+L_5+L_6-2M_{45})D & -1/C_3D \\ (-L_2-L_3-2M_{23})D & -1/C_3D & R_2+1/C_3D+(L_2+L_3+2M_{23})D \end{vmatrix}$$

Método de los Nudos (I)

Escritura directa de las ecuaciones.

1.- Convertimos todas las fuentes de tensión a fuentes de intensidad.

2.- Tomamos un nudo como referencia asignándole tensión nula. Las tensiones de los otros n-1 nudos son las incógnitas a calcular.

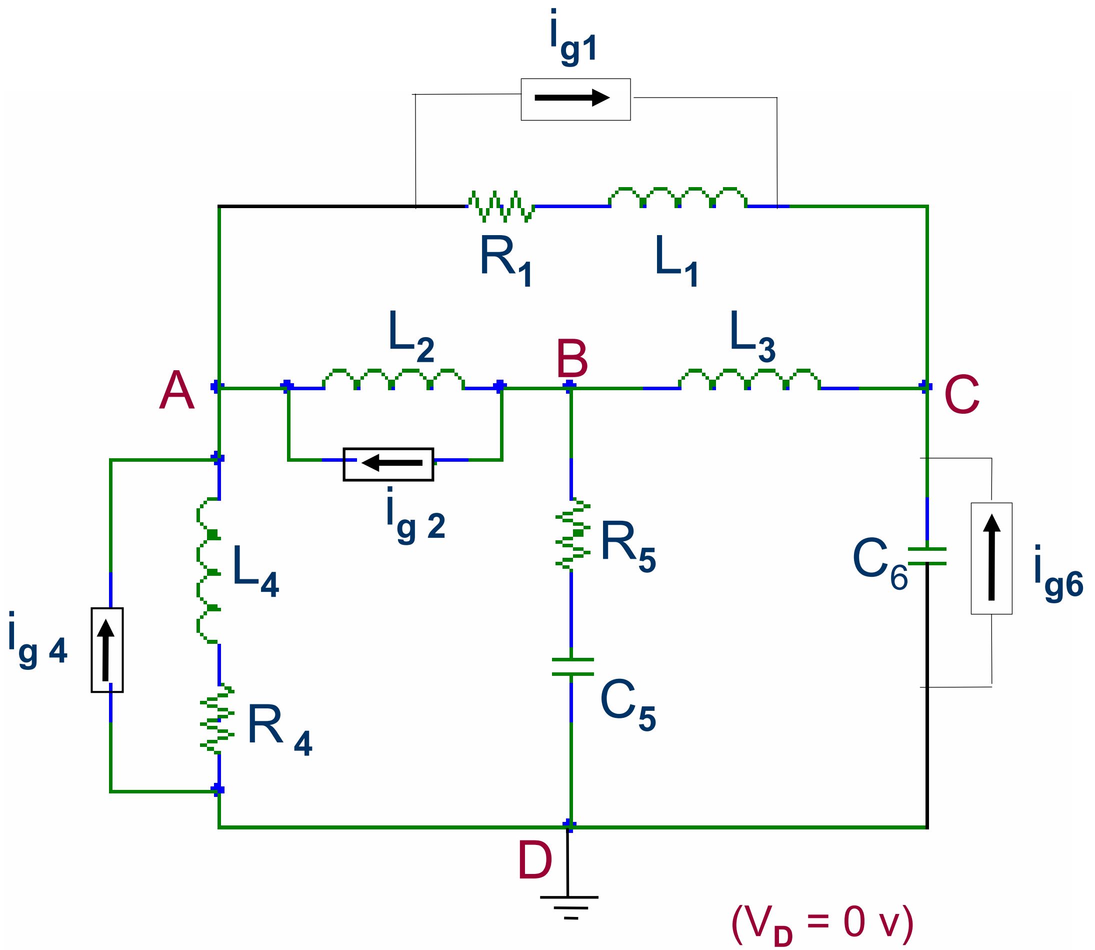
3.- Construimos las matrices de la ecuación del método: $[i_N] = [Y_N][u_N]$

$[i_N]$ es una matriz columna cuyos elementos recogen las fuentes de intensidad conectadas a los distintos nudos, y serán positivas las fuentes que metan intensidad en el nudo. El primer elemento de la matriz estará formado por las fuentes conectadas al primer nudo.

$[Y_N]$ es la matriz de admitancias nodales. Es una matriz cuadrada. Los elementos de la diagonal principal Yii representan las admitancias conectadas a cada nudo. Siempre son positivos. Los elementos Yij recogen elementos comunes a los nudos i y j, y se toman siempre con signo menos.

$[u_N]$ recoge las tensiones de los n-1 nudos, y son las incognitas a calcular.

Método de los Nudos (II)

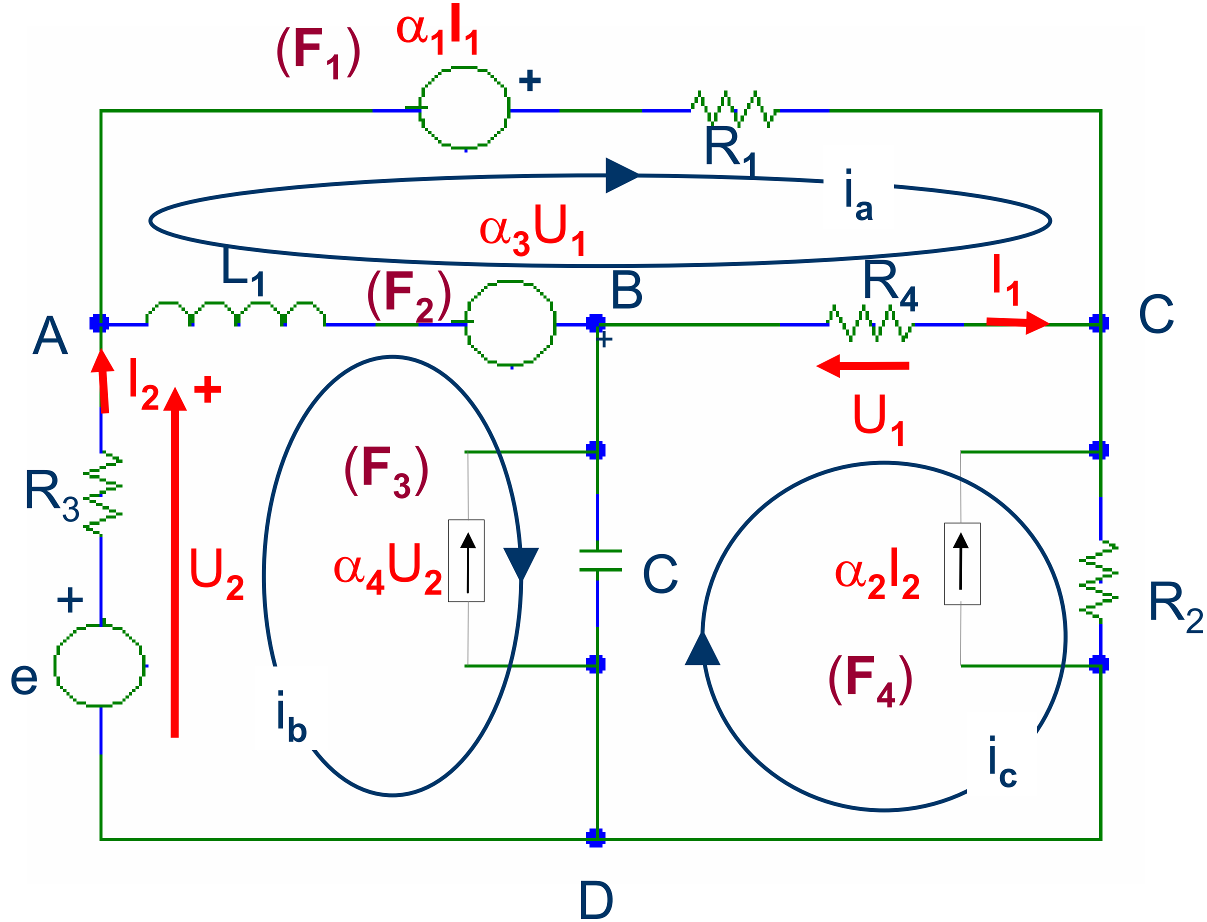


.../...

Método de los Nudos (III)

$$\begin{bmatrix} -i_{g1}+i_{g2}+i_{g4} \\ -i_{g2} \\ i_{g1}+i_{g6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2D}+\frac{1}{R_1+L_1D}+\frac{1}{R_4+L_4D} & \frac{-1}{L_2D} & \frac{-1}{R_1+L_1D} \\ \frac{-1}{L_2D} & \frac{1}{L_2D}+\frac{1}{L_3D}+\frac{1}{R_5+1/C_5D} & \frac{-1}{L_3D} \\ \frac{-1}{R_1+L_1D} & \frac{-1}{L_3D} & \frac{1}{L_2D}+\frac{1}{R_1+L_1D}+\frac{1}{1/C_6D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Circuitos con Fuentes Dependientes (I)



…/…

Circuitos con Fuentes Dependientes (II)

Al aplicar los anteriores métodos a circuitos con fuentes dependientes, además de las variables del método, aparecen las variables de dependencia. La resolución se plantea poniendo estas en función de las primeras. Si decidimos resolver por mallas los pasos a dar son:

1º.- Definimos las mallas con sus corrientes. Tomamos por ejemplo $i_{\mathbf{a}}$, $i_{\mathbf{b}}$, $i_{\mathbf{c}}$.

2º.- Convertimos todas las F. I. dependientes e independientes a F. T.

3º.- Ponemos las variables de la dependencia, en función de las corrientes de malla, con lo que nos quedarán las fuentes dependientes con las siguientes expresiones:

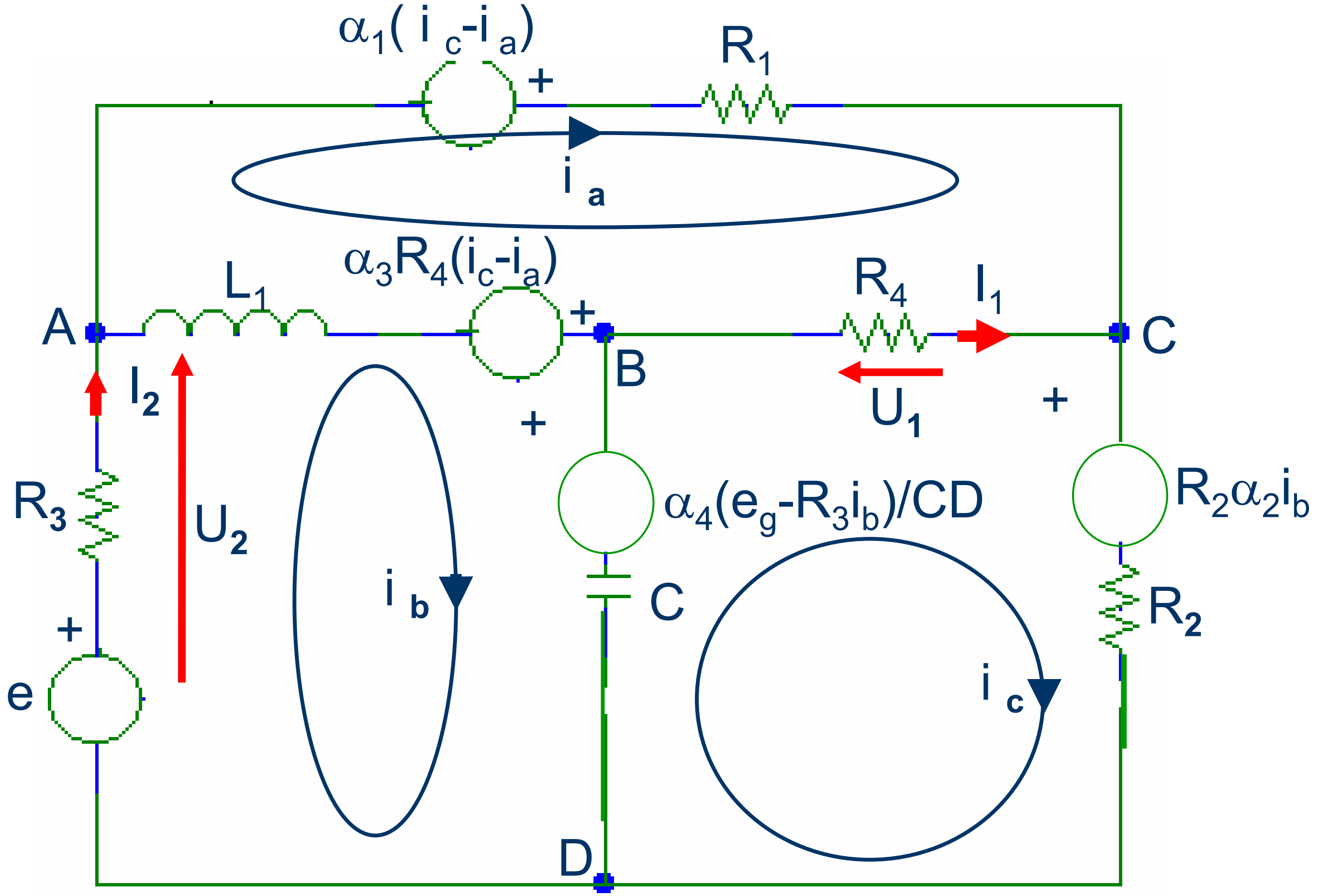
(**F1**): $\alpha_1 I_1 = \alpha_1(i_{\mathbf{c}}-i_{\mathbf{a}})$ (**F2**): $\alpha_3 U1 = \alpha_3 R_{\mathbf{4}} I_{\mathbf{1}} = \alpha_{\mathbf{3}} R_{\mathbf{4}}(i_{\mathbf{c}}-i_{\mathbf{a}})$

(**F3**): $\alpha_4 U_2/CD = \alpha_4\,(e-R_3 I_2)/CD = \alpha_4\,(e-R_3 i_{\mathbf{b}})/CD$ (**F4**): $R_2\alpha_2 I_2 = R_2\alpha_2 i_{\mathbf{b}}$

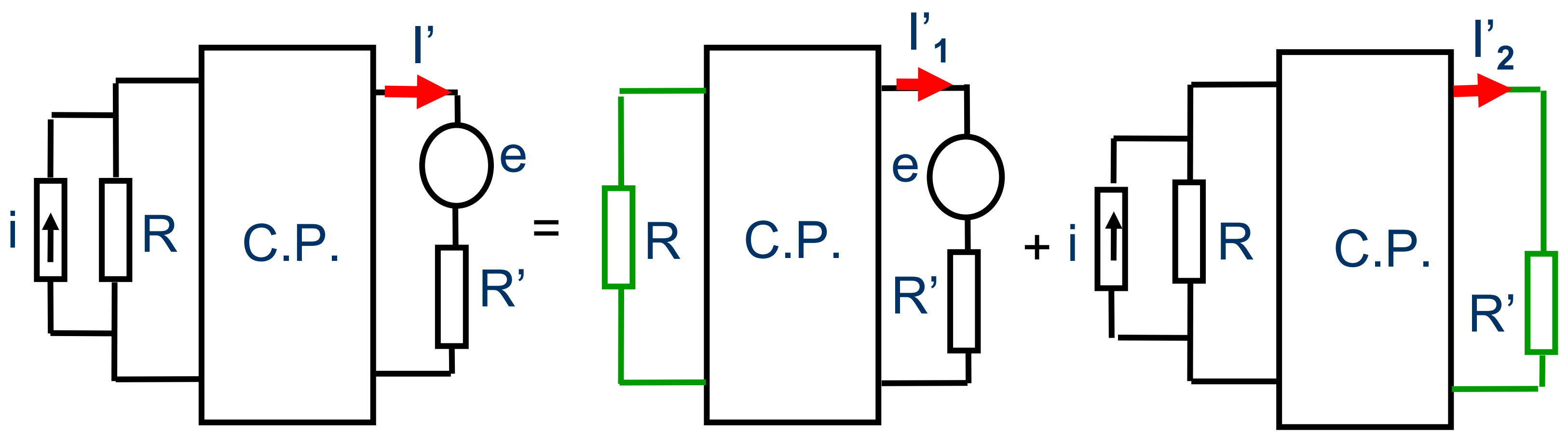
4.- Aplicamos el método de las mallas al circuito de la figura siguiente.

…/…

Circuitos con Fuentes Dependientes (III)



TEOREMAS (I) (Teorema de la Superposición)



Circuito Inicial (2 fuentes) = Suma de dos circuitos (con 1 fuente)

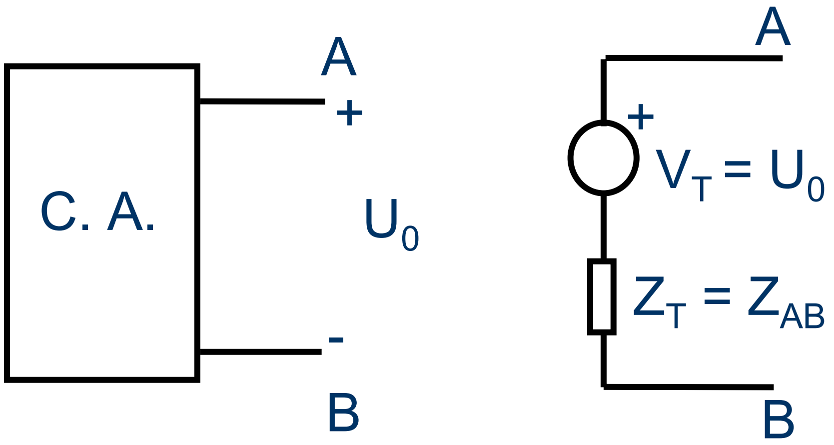
La respuesta de un circuito eléctrico lineal e invariante con varias fuentes independientes, es igual a la suma de las respuestas del circuito a cada una de las fuentes de excitación actuando por separado: $\mathbf{I' = I'_1 + I'_2}$

Para eliminar una fuente real de tensión se cortocircuita la fuente (queda R').

Para eliminar una fuente real de intensidad se abre la rama de la fuente (queda R).

TEOREMAS (II) (Teorema de Thevenin)

Todo circuito lineal y activo visto desde dos terminales AB, es equivalente a una fuente real de tensión conectada a esos terminales, y cuyos elementos V_T, Z_T reciben el nombre de generador e impedancia de Thevenin. El valor de V_T es la tensión de vacío que aparece en el circuito inicial entre A y B, y el de Z_T es el de la impedancia que se mide entre esos puntos al convertir en pasivo el circuito activo (C. A.) inicial.

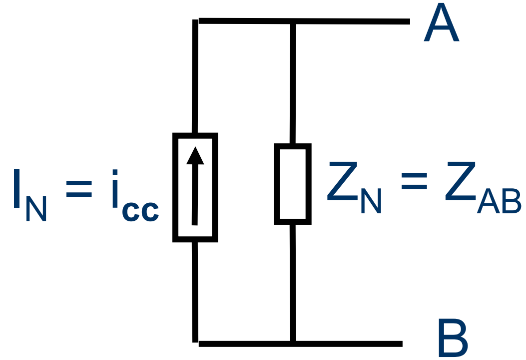


En la práctica U_0 se puede obtener con un polímetro conectándolo entre A y B. Z_{AB} también, si antes se eliminan las fuentes independientes del circuito. Otra forma es utilizar los métodos de análisis de circuitos.

TEOREMAS (III) (Teorema de Norton)

Todo circuito lineal y activo visto desde dos terminales AB, es equivalente a una fuente real de intensidad conectada a esos terminales, y cuyos elementos I_N, Z_N reciben el nombre de generador e impedancia de Norton. El valor de I_N es la corriente de cortocircuito que aparece en el circuito inicial entre A y B al cortocircuitar estos nudos, y el de Z_N es el de la impedancia que se mide entre esos puntos al convertir en pasivo el circuito activo inicial.

Supongamos el mismo circuito que en Thevenin. Si cortocircuitamos los puntos A y B, por ellos circulará una corriente que llamaremos i_{cc} , tanto si entre A y B hay una impedancia ó si está abierto. Según el teorema, ese circuito es equivalente a:



TEOREMAS (IV) (Thevenin y Norton)

En los dos teoremas vistos, si partimos del mismo circuito, los resultados que obtengamos (la F. de T. de Thevenin y la F. de I. de Norton) serán equivalentes entre sí, y debido a esta equivalencia se cumplirá la relación que hay entre F. de T. y de I. equivalentes, es decir: La $Z_{\mathbf{T}} = Z_{\mathbf{N}} = Z_{\mathbf{AB}}$ y además se cumplirá que la $V_{\mathbf{T}} = Z_{\mathbf{AB}}\, I_{\mathbf{N}}$.

En el caso de que el circuito tenga fuentes dependientes, el cálculo de la $Z_{\mathbf{AB}}$ no se puede hacer eliminando simplemente las fuentes independientes.

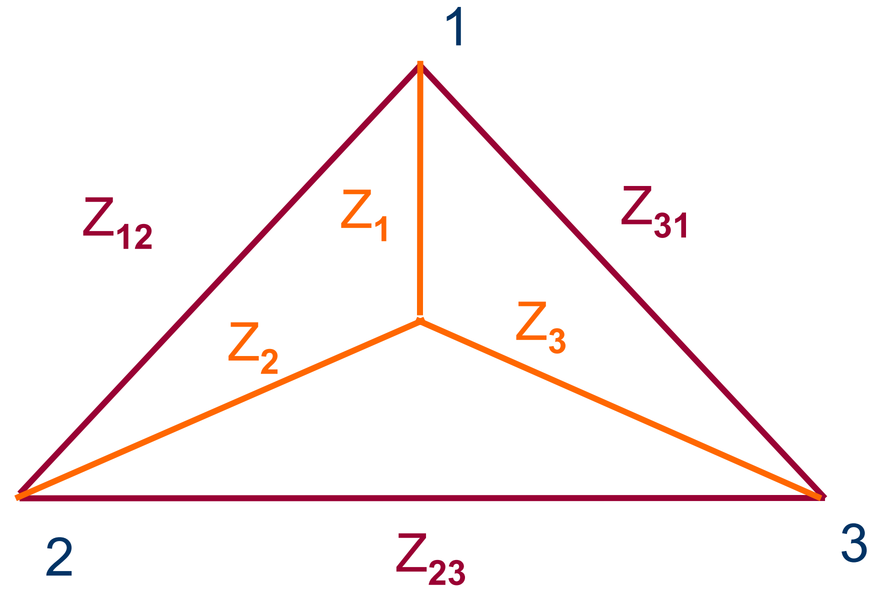
Cuando existen acoplamientos magnéticos**,** al calcular $Z_{\mathbf{AB}}$ hay que tener cuidado de no cortar dicho acoplamiento cuando se abre entre AB.

En estos dos últimos casos se recomienda utilizar el concepto general de impedancia:

$$Z_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{AB}}$$

TEOREMAS (V) (Teorema de Rosen.)

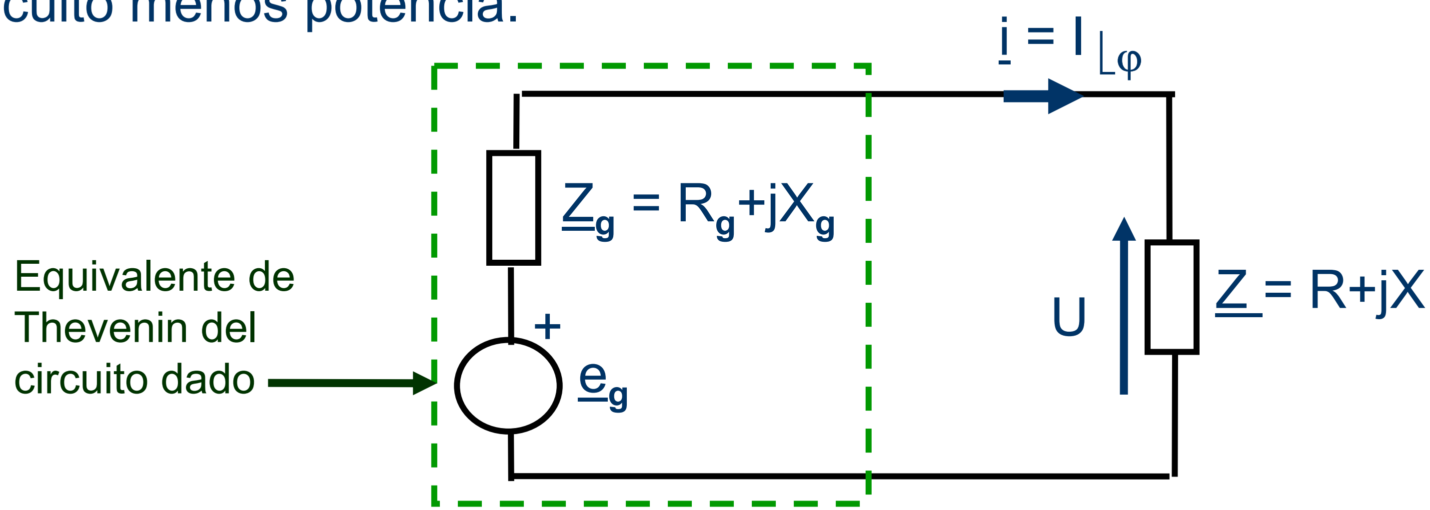
Si en un circuito, una conexión en estrella la convertimos en una conexión en triángulo (polígono) utilizando las siguientes fórmulas, en el resto del circuito no cambian ni tensiones ni corrientes.



$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \qquad Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{13}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

TEOREMAS (VI) (Teorema de la máxima transferencia de potencia)

Para un circuito dado, existe una determinada carga que obtiene la máxima potencia del circuito. Cualquier otra carga (con otro valor) obtiene del circuito menos potencia.



El cálculo del valor de esa carga y el de la potencia transmitida se realiza aplicando Thevenin al circuito dado. En la figura, $\underline{e}_g$ y $\underline{Z}_g$, representan el equivalente del Thevenin del circuito dado.

La potencia que se transmite a la carga es $P = RI^2$. Maximizando I se maximiza P.

TEMA 4.- Sistemas Polifásicos

En este tema estudiaremos:

1º Los circuitos trifásicos equilibrados, en tensiones y también en cargas, no entrando en el estudio de los circuitos desequilibrados.

2º Las conexiones básicas en estrella y en triángulo y sus asociaciones.

3º Como podemos construir los circuitos monofásicos, equivalentes a los anteriores trifásicos.

4º Las relaciones que hay entre las tensiones y corrientes de fase y de línea, y sus diagramas fasoriales.

5º Las expresiones de las potencias en trifásica.

Sistemas Trifásicos (I)

Supongamos tres generadores (ó bobinados) que producen las f. e. m. e_1 e_2 e_3. Un circuito trifásico lo supondremos alimentado por estas tres ondas senoidales, desfasadas 120º en el tiempo. Por tener igual valor máximo y el mismo desfase entre ellas lo llamamos un sistema trifásico equilibrado en tensiones. Podemos representarlas en forma trigonométrica ó en forma fasorial:

$e_1 = U_0$ Sen wt.

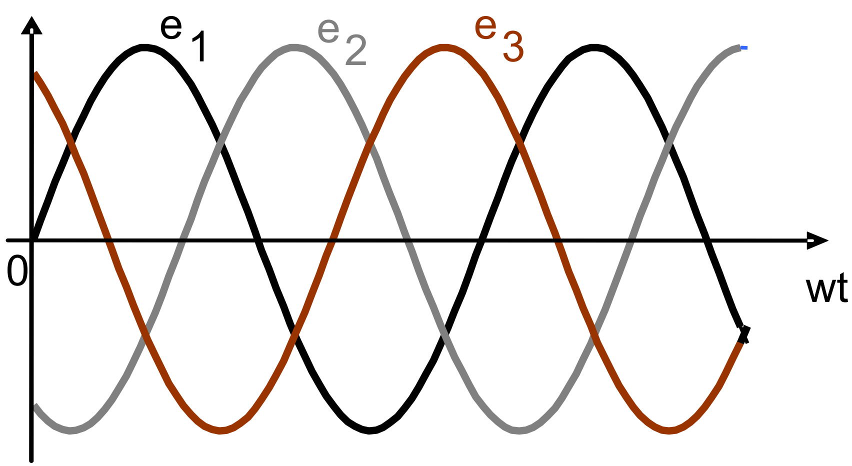
$e_2 = U_0$ Sen (wt-2π/3)

$e_3 = U_0$ Sen (wt-4π/3)

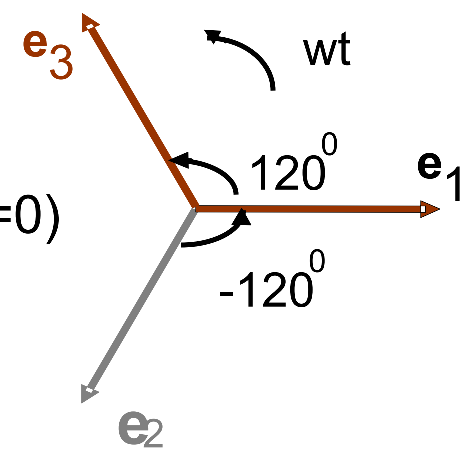
$\underline{e}_1 = U\angle 0^0$ (Como fasor)

$\underline{e}_2 = U\angle -2\pi/3 = U\angle -120$

$\underline{e}_3 = U\angle -4\pi/3 = U\angle -240$ $(U_0 = \sqrt{2}\,U)$



$(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = 0)$



Sistemas Trifásicos (II)

Definimos:

Fases: Son las fuentes e_1 e_2 e_3. También las ramas de las cargas.

Secuencia de fases: El orden en que giran. (Sec. Directa ó Sec. Inversa)

Tensión de fase: Son los valores de e_1 e_2 e_3

Tensión útil de fase: La designaremos por U_1,U_2,U_3 y de forma genérica U_F.
Si las fuentes $e_{\mathbf{i}}$ tienen una impedancia despreciable, se cumple que $e_{\mathbf{i}} = U_{\mathbf{i}}$

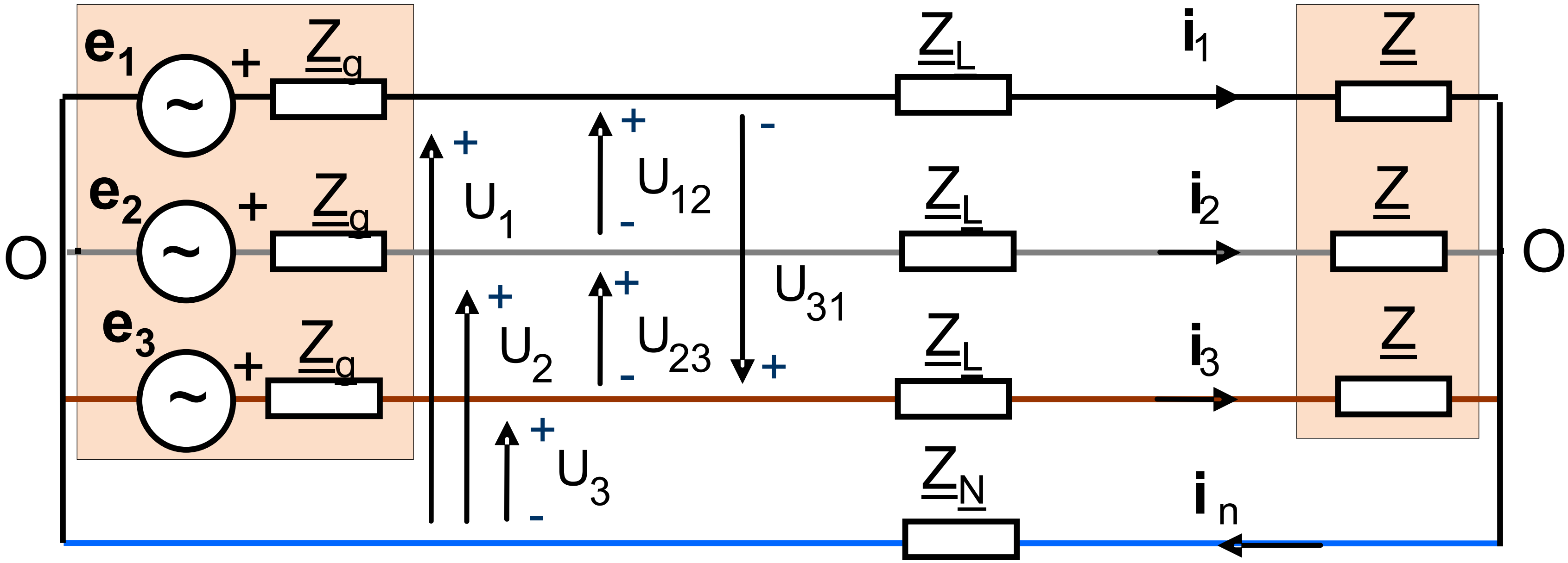
Corrientes de fase: Las que circulan por las fases.

Tensión de línea: Tensión entre dos fases. $U_{12} = U_1 - U_2$ …Genéricamente: U_L

Intensidades de línea: Circulan por hilos que unen generador y carga (I_L)

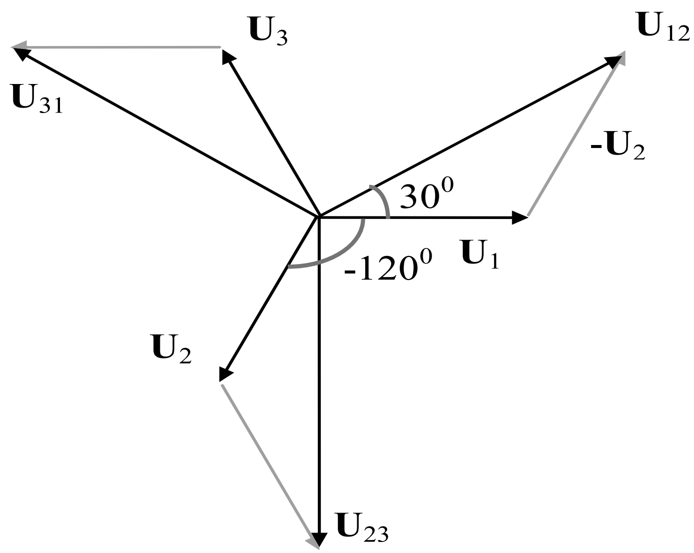
Sistemas Trifásicos (III)

Sistema Trifásico Equilibrado en Estrella



Sistemas Trifásicos (IV)

Carga en estrella: Tensiones y corrientes de línea y de fase



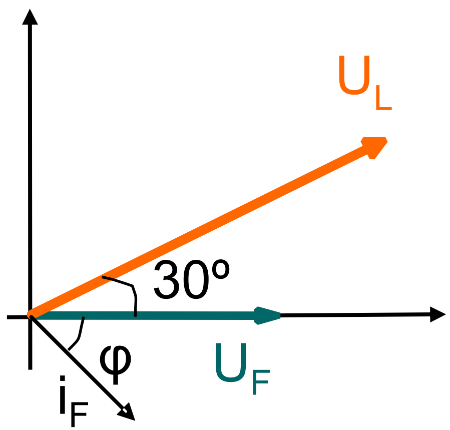
$$U_{12} = U_1(\sqrt{3}\angle 30^0) \text{ ó } U_L = U_F(\sqrt{3}\angle 30^0) \quad \text{(Para sec. directa)}$$

$$U_L = U_F(\sqrt{3}\angle -30^0) \quad \text{(Para sec. inversa)}$$

Para las intensidades, se cumple que $I_F = I_L$.

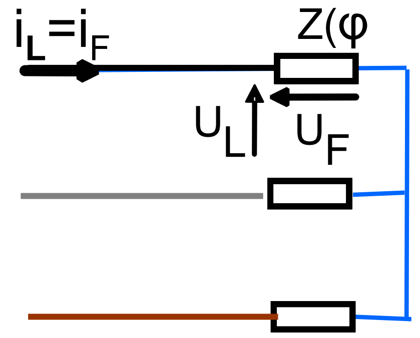
Sistemas Trifásicos (V)

Carga en estrella: Diagrama fasorial y potencias.



$U_L = U_F(\angle 30^0)$

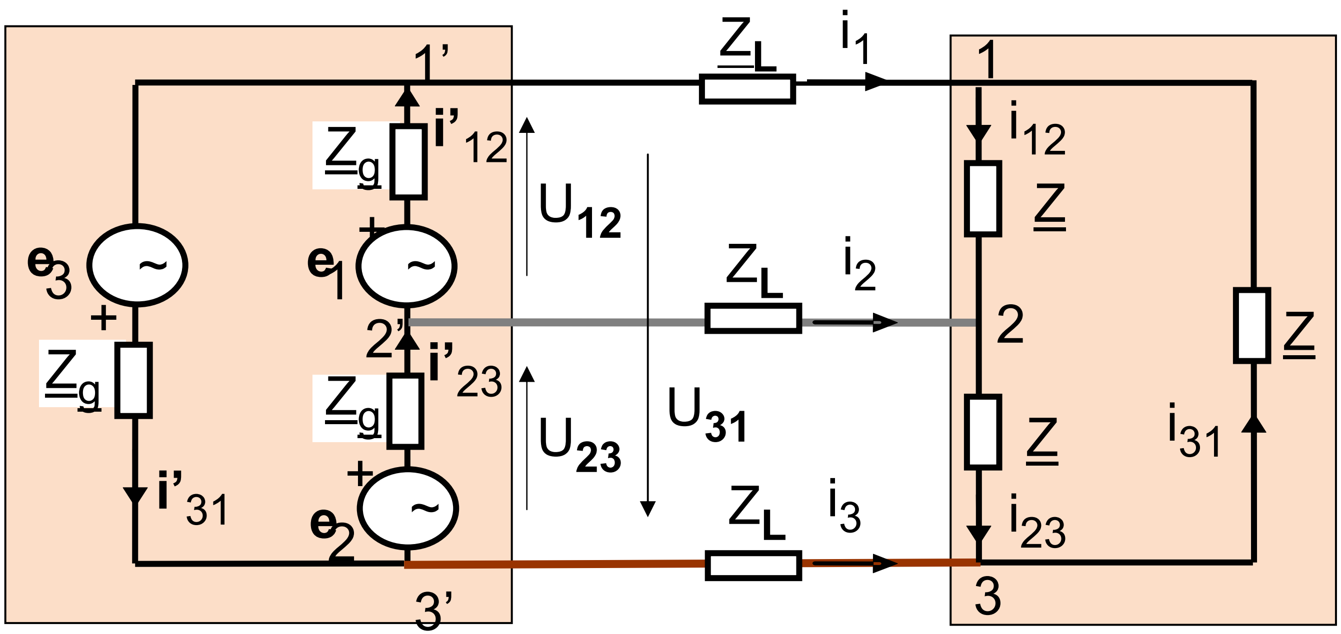
$I_F = I_L$



$P_T = 3P = 3U_F I_F \, Cos\varphi = 3(U_L/\sqrt{3})I_L \, Cos\varphi = \sqrt{3}\, U_L I_L \, Cos\varphi.$

La $Q_T = \sqrt{3}\; U_L I_L \, Sen\varphi$ y la $S = 3U_F I_F = \sqrt{3}\, U_L I_L$

Sistemas Trifásicos (VI)
Sistema Trifásico Equilibrado en Triángulo

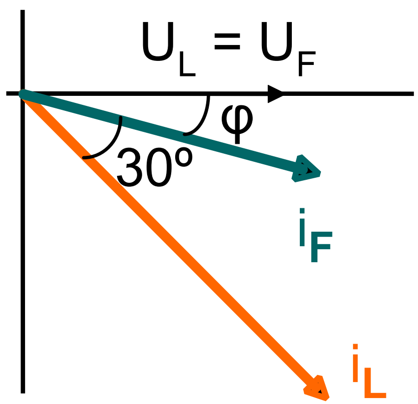


$i_L = i_F\,(\sqrt{3}\,\angle{-30^0})$ (Sec. Direc.) $\quad i_L = i_F\,(\sqrt{3}\,\angle 30^0)$ (Sec. Inv.)

$U_L = U_F$

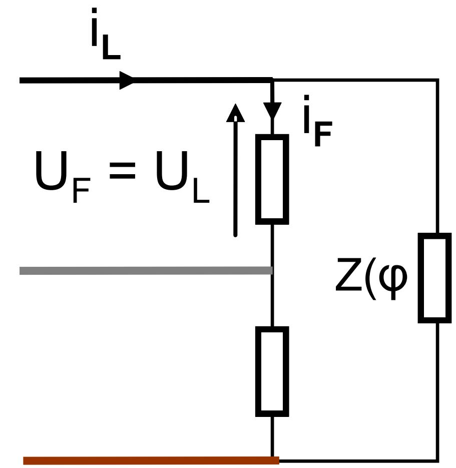
Sistemas Trifásicos (VII)

Carga trifásica en triángulo: Diagrama fasorial y potencias



$U_L = U_F$

$\bar{I}_F(\sqrt{3}\angle -30^0) = \bar{I}_L$



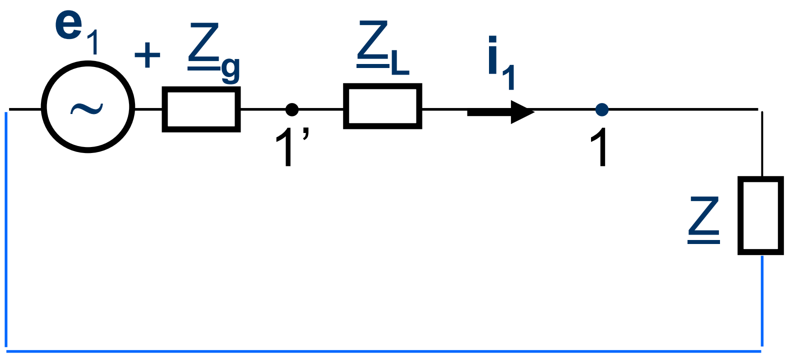
$$P = 3P = 3U_F I_F \cos\varphi = 3U_L(I_L/\sqrt{3})\cos\varphi = \sqrt{3}\,U_L I_L \cos\varphi$$

La Q_T y la S tampoco cambian

Sistemas Trifásicos (VIII)

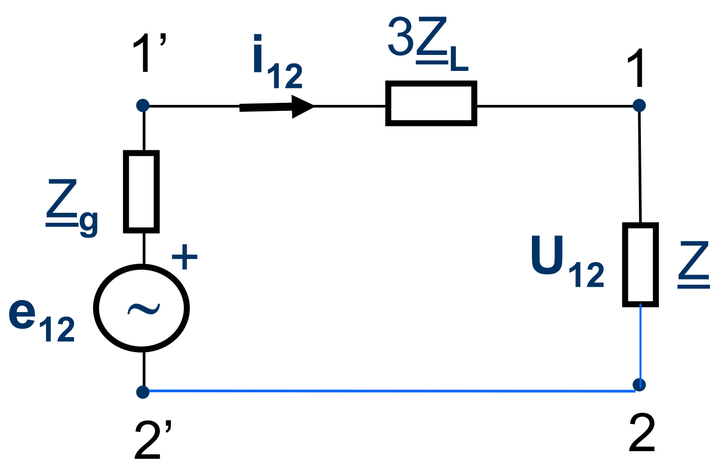
Circuitos Monofásicos Equivalentes

Monofásico equivalente de una estrella.



$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z})$$

Monofásico equivalente de un triángulo.



$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{i}_{12}(\underline{Z}_g + 3\underline{Z}_L + \underline{Z})$$

TEMA 5.- Regímenes Transitorios en Circuitos Lineales

En este tema, estudiaremos el comportamiento de un circuito desde que se conecta la fuente de alimentación, hasta que al cabo de un tiempo se estabiliza la señal (régimen transitorio mas régimen permanente). Hasta aquí hemos estudiado los circuitos en régimen permanente, lo que permitió, cuando alimentábamos con ondas senoidales, sustituir la derivada ó la integral por jw ó 1/jw.

Las ecuaciones de un circuito son ecuaciones diferenciales de primer orden cuando existe una L ó un C, y son ecuaciones diferenciales de segundo orden cuando hay L y C. Se aplicaran por tanto, en este tema, la técnica general de resolución de estas ecuaciones, y también la transformada de Laplace para obtener la solución.

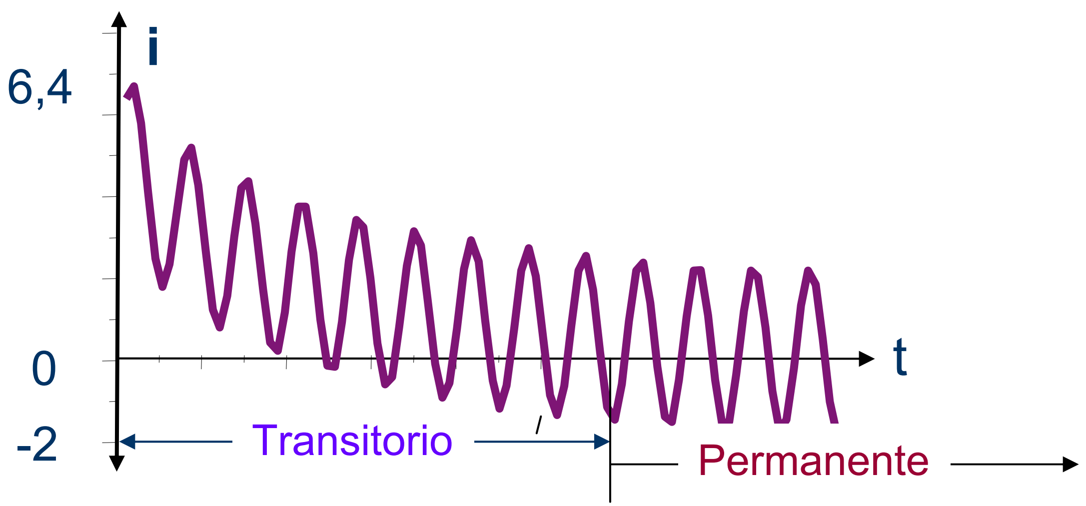
En unos casos la ecuación diferencial se referirá a una tensión y en otros, a una intensidad.

En circuitos donde exista mas de una malla o de un nudo, tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (I)

Al conectar una fuente a un circuito, se pueden considerar dos etapas en la señal que lo alimenta; una inicial o transitoria, en la cual la señal "se adapta al circuito", y otra posterior, de régimen estacionario o permanente, donde la señal, "ya adaptada", se mantiene inalterable.

Hasta ahora hemos estudiado los circuitos solo en esta segunda etapa. En este tema el estudio se va a extender a la etapa transitoria, observando el circuito desde t=0. La siguiente gráfica representa la **i** que se establece en un circuito RL cuando se le conecta una fuente de tensión senoidal.



REGÍMENES TRANSITÓRIOS (II)

Las ecuaciones de circuitos que contienen inductancias ó condensadores incluyen forzosamente derivadas o integrales, son por tanto ecuaciones diferenciales. La resolución de estos circuitos implica en definitiva la resolución de ecuaciones diferenciales de primer ó segundo orden con coeficientes constantes. Además estas ecuaciones pueden ser homogéneas, caso en que no exista una fuente y la intensidad que circule proceda de algún elemento cargado, ó ecuaciones completas, con un término independiente que origina precisamente la fuente de alimentación.

La solución total de la ecuación diferencial (y), o sea la solución del circuito válida para cualquier instante, se obtiene construyendo una solución particular de la completa (y_p), que es el régimen permanente, y es lo que hemos venido resolviendo hasta ahora, a la que hay que sumar la solución general de la homogénea (y_h), que es lo que llamamos el régimen transitorio, tiempo durante el cual la señal de la fuente se adapta al circuito.

$$y = y_p + y_h$$

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (III)

El planteamiento para obtener la solución de la ecuación diferencial, será:

1. Obtener matemáticamente la solución y_h, resolviendo la ecuación diferencial homogénea.

2. A continuación obtener eléctricamente la solución y_p, observando el comportamiento del circuito.

3. Sumar las dos soluciones, lo que nos da la solución de la ecuación completa.

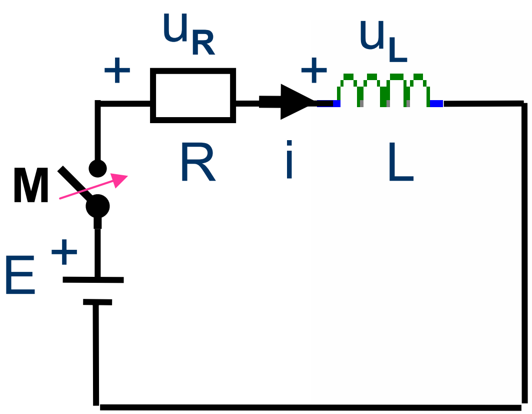
4. Por último se determinan las constantes de integración que puedan aparecer en la solución completa, para lo cual habrá que estudiar lo que llamaremos las condiciones de contorno del problema, en donde se observará lo que le pasa al circuito y a la ecuación en determinados instantes, por ejemplo en $t = 0$, en $t = 0^-$ y en $t = 0^+$ (que son unos instantes infinitesimales anterior y posterior al $t = 0$). La variable de integración "y" en unos casos será la intensidad y en otros la tensión.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (I)

Circuito serie R-L alimentado a tensión constante.

En el instante t = 0 se cierra M, con lo que aparecen una corriente i, y las caídas de tensión u_R y u_L, con las polaridades indicadas, la L.T.K. nos da:

$$E = u_R + u_L = Ri + Li' \qquad (i'=di/dt)$$



La solución de la ec. dif. homogénea $Ri + Li' = 0$ es $i_h = ke^{(-R/L)\,t}$

Para obtener la i_p observamos el circuito en régimen permanente, y como una bobina se comporta ante la corriente continua como un cortocircuito resulta que $E = Ri$, luego la $i_p = E/R$, por tanto $i = ke^{(-R/L)\,t} + E/R$.

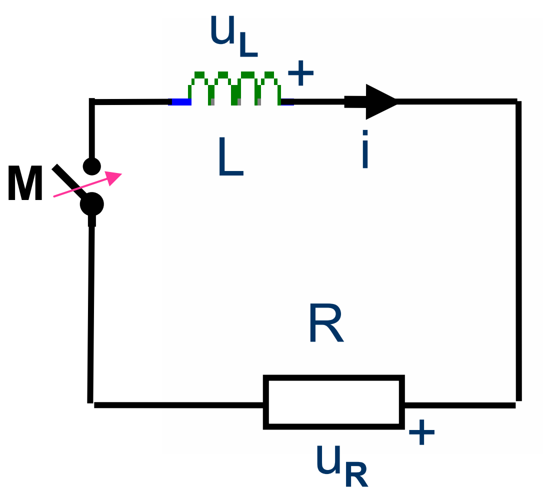
Para definir k, buscamos el valor de i en un determinado momento, viendo lo que les pasa a la ecuación y al circuito en ese instante, y si por ejemplo en t =0, la $i(0) = I_0$, se cumple que $i(0) = I_0 = k + E/R$. Sustituyendo k:

$$i = (I_0 - E/R)e^{(-R/L)\,t} + E/R$$

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (II)

Descarga de una bobina sobre una R.

Supongamos la bobina "cargada" y en el instante t = 0 se cierra M, con lo que aparecen una corriente i, y la caída de tensión u_R, cumpliéndose que $u_R = u_L$ y sustituyendo $Ri = -Li'$, que es una ec. dif. homogénea igual que la anterior. La solución es por tanto $i_h = ke^{(-R/L)\,t}$



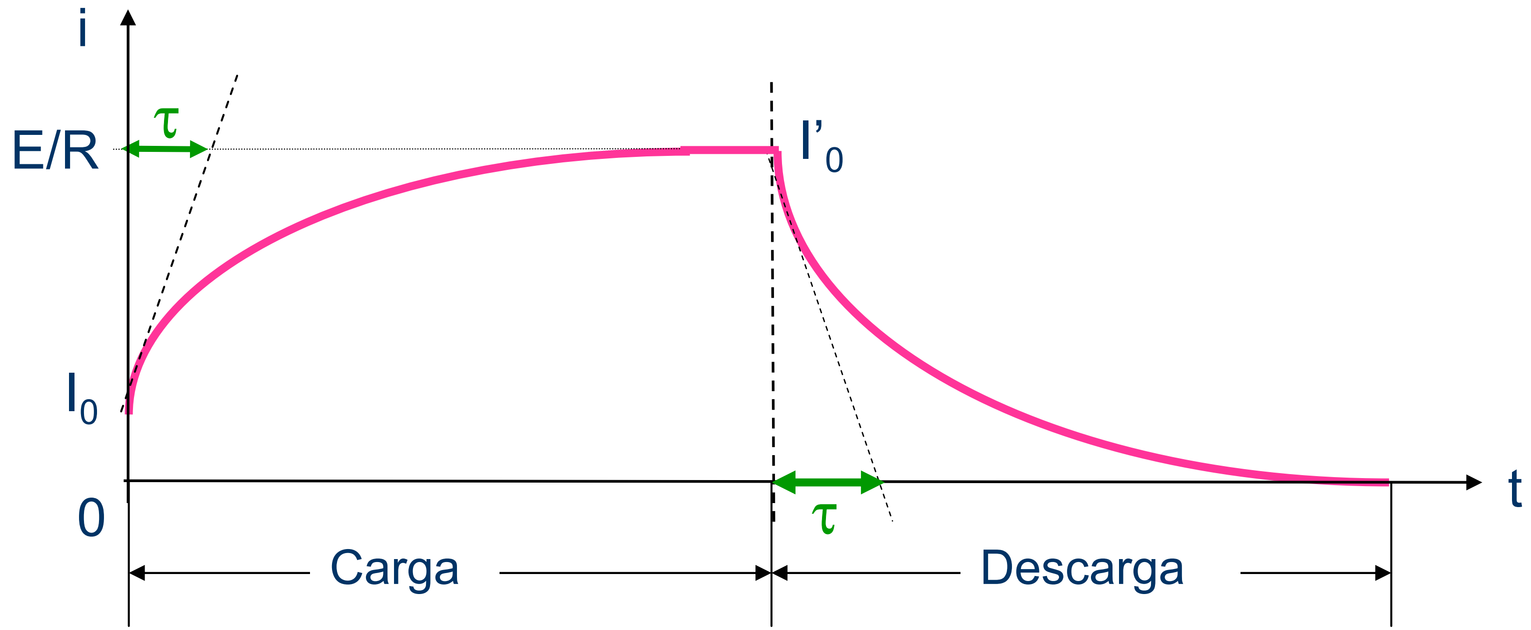
Para obtener la i_p observamos que la corriente es producida por la L, no por una fuente de tensión, por tanto al cabo de un tiempo se anulará, luego en régimen permanente no existe corriente, o sea $i_p = 0$ luego la corriente total $i = i_h = ke^{(-R/L)t}$.

Si en t =0, la $i(0) = I'_0$, se cumple que $i(0) = I'_0 = k$. Sustituyendo k:

$$i = I'_0 e^{(-R/L)\,t}$$

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (III)

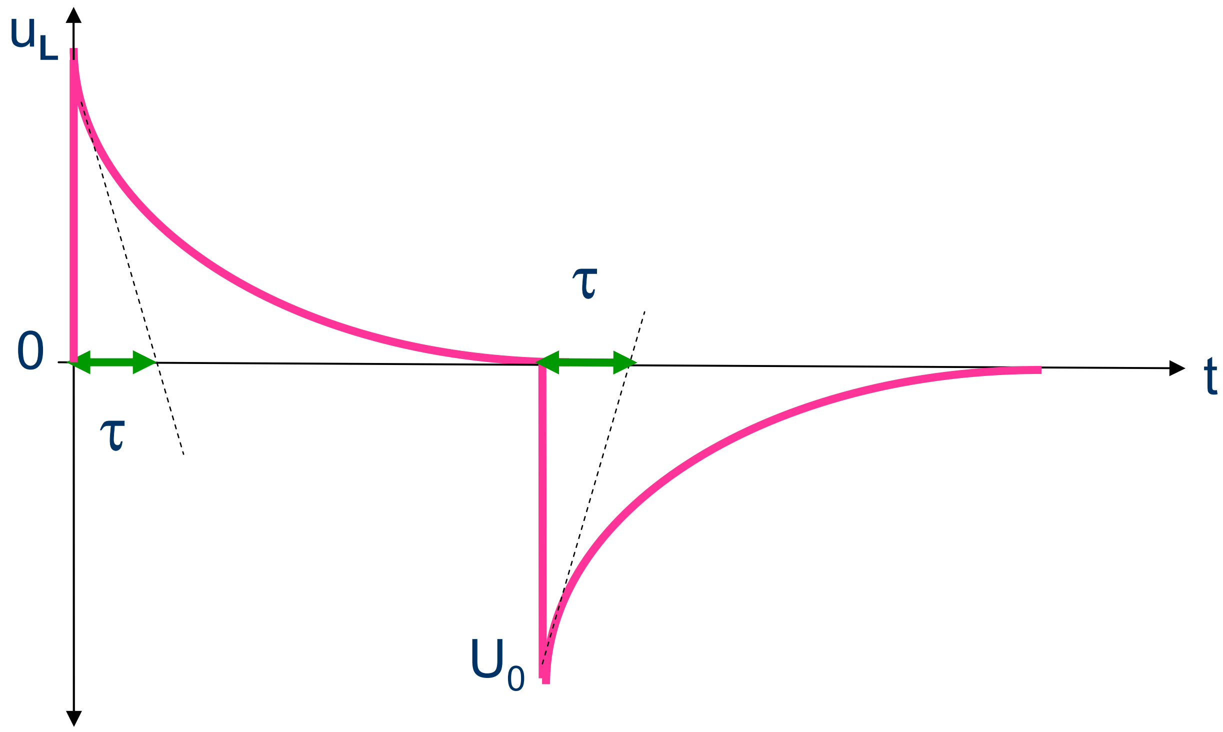
Gráfica de la intensidad de carga y de descarga de la bobina.



Es una función continua. La constante de tiempo del circuito es $\tau = L / R$.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (IV)

Gráfica de la tensión en la bobina durante la carga y descarga.

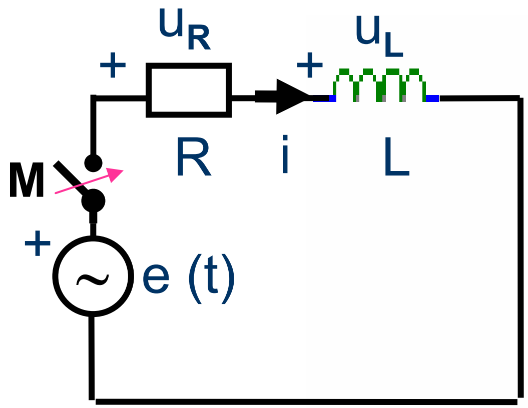


Puede ser una función discontinua, y aparecer impulsos de tensión.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (V)

Circuito serie R-L alimentado con una tensión senoidal.

Este circuito solo cambia con respecto al visto, la fuente, que ahora es una tensión senoidal $e(t) = U_0$ Senwt, por tanto el régimen transitorio (independiente de la fuente) será $i_h = ke^{(-R/L)\,t}$



La i_p en régimen permanente es $i_p = U_0$ Senwt $/\underline{Z} =$ U_0 Senwt $/(R + jwL) = (U_0/Z)$ Sen(wt-φ).

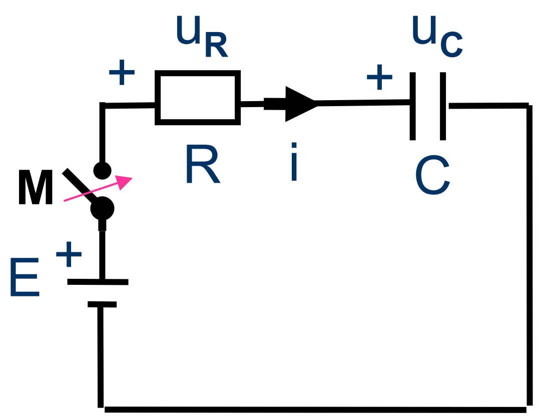
(Siendo φ= Arctg (wL/R) $Z=\sqrt{(R+wL)^2}$).

Luego la $i = ke^{(-R/L)\,t} + (U_0/Z)$ Sen(wt-φ) a falta de determinar la k, que se hará tomando las condiciones de la i en circuito y en la ecuación.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (VI)

Circuito serie R-C alimentado a tensión constante.

En el instante t = 0 se cierra M, con lo que aparecen una corriente i, y las caídas de tensión u_R y u_C cumpliéndose: $E = u_R + u_C = Ri + u_C$ En vez de integrar en "i" como antes, vamos a integrar en u_C, por ser mas cómodo matemáticamente. La $i = C(du_C/dt) = Cu'_C$; $u_R = Ri = RC\,u'_C$ **o sea** $E = RC\,u'_C + u_C$



Transitorio: $0 = RC\,u'_C + u_C$

Su solución es $u_{Ch} = ke^{-(t/RC)}$

Permanente: $u_{Cp} = E$ (Cuando el condensador se carga a la tensión E, la i se anula y $u_R = 0$)

Por tanto $U_C = ke^{-(t/RC)} + E$.

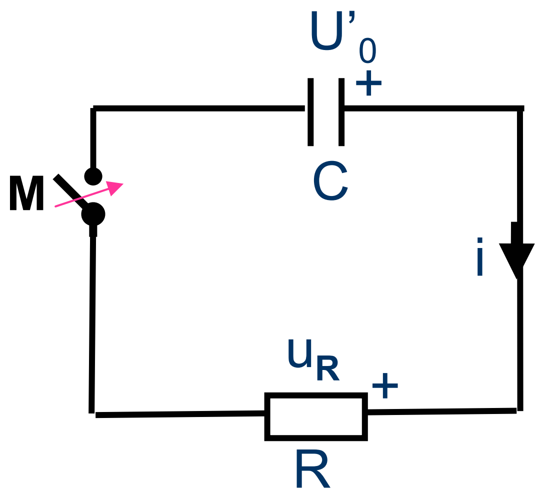
Si en t = 0 $u_C(0) = U_0$, la $U_0 = k + E$ y queda $u_C = (U_0 - E)\,e^{-(t/RC)} + E$.

Conocida u_C, obtenemos la i derivando, y luego obtenemos la u_R.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (VII)

Descarga de un condensador sobre una resistencia.

Supongamos un condensador con una tensión U'_0 con la polaridad indicada, y en t =0 se cierra M, el C descargará su energía en la R llegando a anularse la i, cumpliéndose en el proceso de descarga que $u_C = u_R$, o sea $u_C = -RC\, u'_C$, ecuac. dif. homogénea que representa el transitorio siendo su solución la misma que en el caso anterior, y como no hay fuente, no hay rég. permanente, por tanto:



$$u_C = u_{Ch} = k e^{-(t / RC)}$$

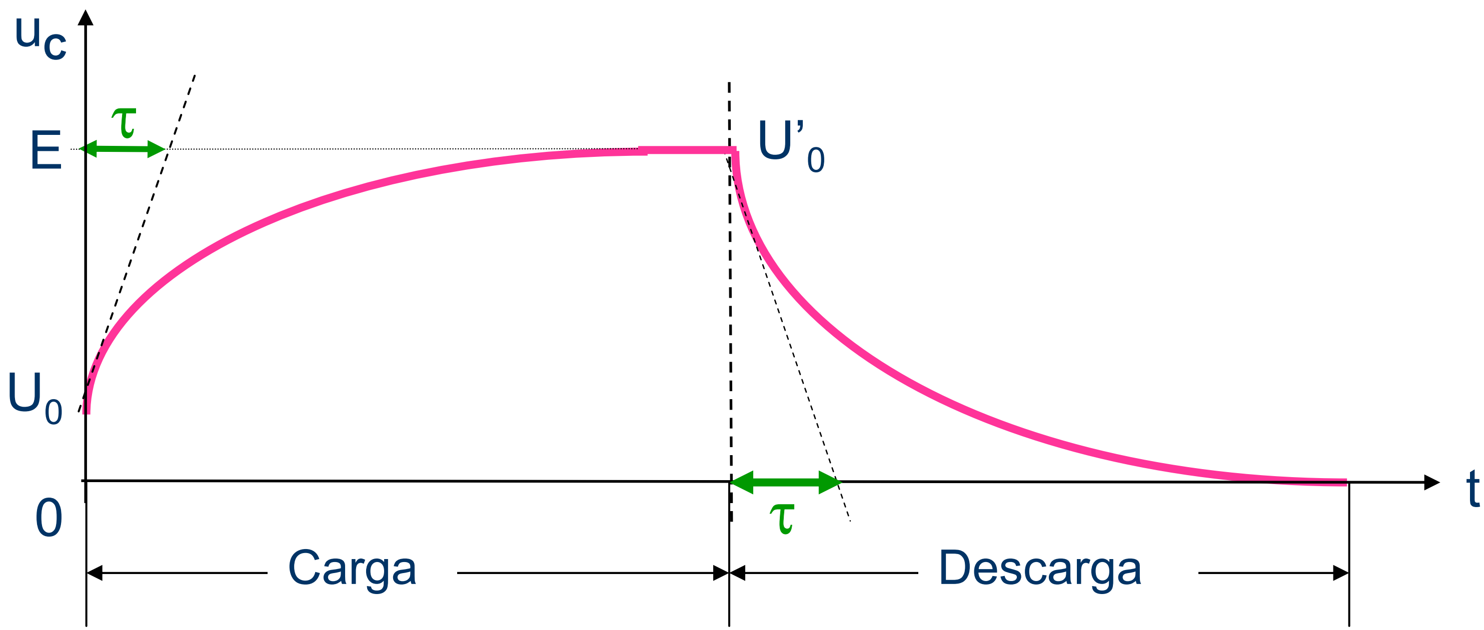
La determinación de k, se realiza de forma similar a lo ya visto.

Régimen senoidal.

Si el circuito en vez de alimentarlo con E se hace con $e(t) = U_0$ Sen wt, el transitorio no cambia y el permanente se obtiene de $u_{CP} = i_P \underline{Z}$

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (VIII)

Gráfica de la tensión de carga y de descarga del condensador.



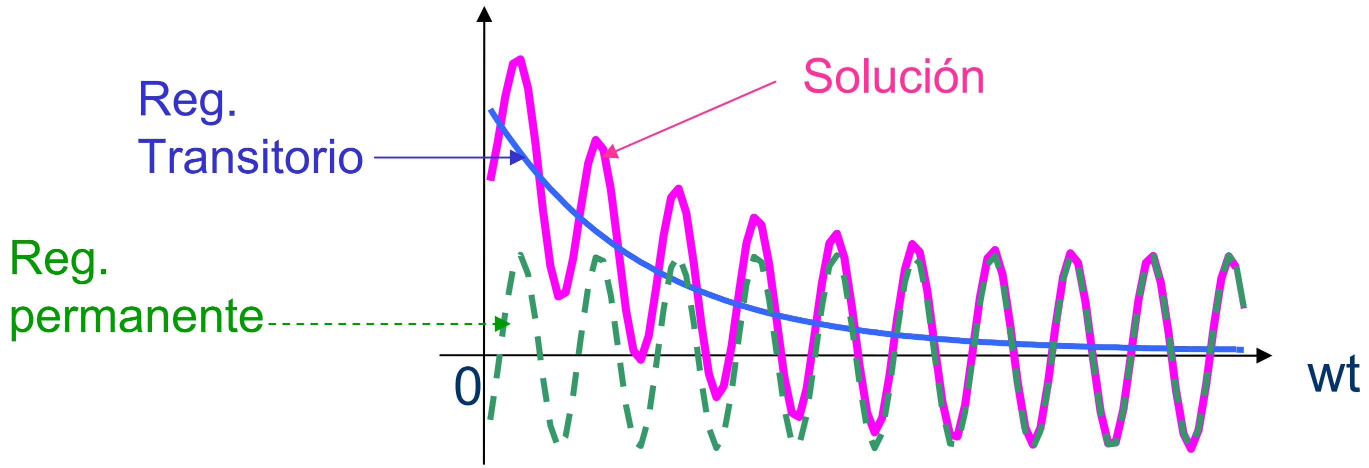
Es una función continua. La gráfica de la corriente tomaría la forma de la gráfica de la tensión en la bobina.

La constante de tiempo del circuito es τ = RC.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de primer orden) (IX)

Circuito serie R-C alimentado con una tensión senoidal.

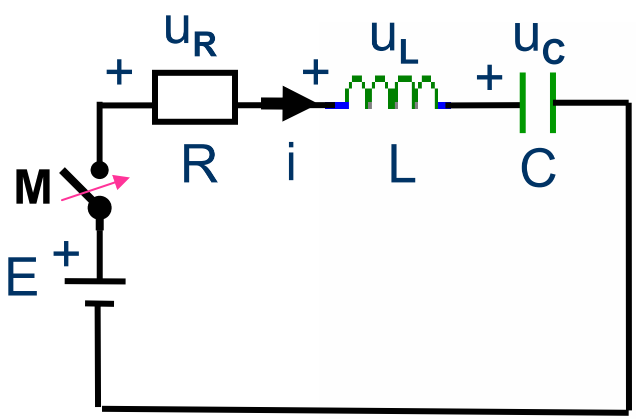
Si el circuito RC en vez de alimentarlo con E se hace con e(t)= U_0 Sen wt, el transitorio no cambia y el permanente se obtiene de $u_{CP} = i_P \underline{Z}$. La u_C para R =1,4Ω y de C =1,2 F toma la expresión $u_C = 1{,}5e^{-0{,}5t} + 0{,}6\mathrm{Sen}(6t - \pi/4)$ que corresponde a la gráfica siguiente:



REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de segundo orden) (I)

Circuito serie R-L-C alimentado a tensión constante.

En t = 0, se cierra M, se establece la ecuación: $E = u_R + u_L + u_C$. Para plantear la ecuación diferencial en u_C tendremos $i = C(du_C/dt)$ de donde $u_R = Ri = RC(du_C/dt) = RCu'_C$ y la $u_L = LC(d^2u_C/dt^2) = LCu''_C$, y sustituyendo:



$$E = RCu'_C + LCu''_C, + u_C$$

Para obtener u_{Ch}, usamos el operador D, y nos queda $0 = LCD^2 + RCD + 1$, ecuación de 2º grado en D, con dos raíces α_1 y α_2. Según la naturaleza de α_1 y α_2 será u_{Ch}; si son reales:

$$u_{Ch} = Ae^{\alpha 1t} + Be^{\alpha 2t}$$ (Ver siguiente diapositiva)

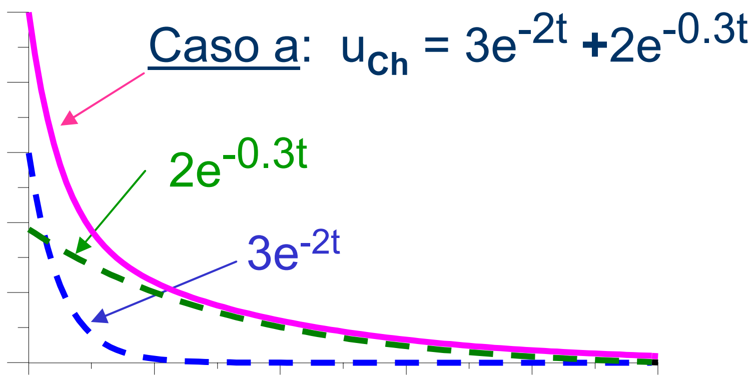
En rég. permanente, el C acaba cargándose a la tensión de la fuente, con lo que se anula la i y queda $u_{Cp} = E$. La solución es: $u_C = Ae^{\alpha 1t} + Be^{\alpha 2t} + E$.

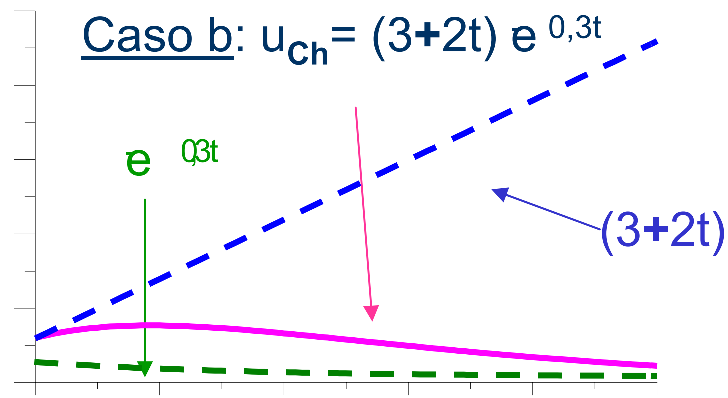
Las ctes. A y B se determinan definiendo las condiciones de contorno en el circuito y en la ecuación.

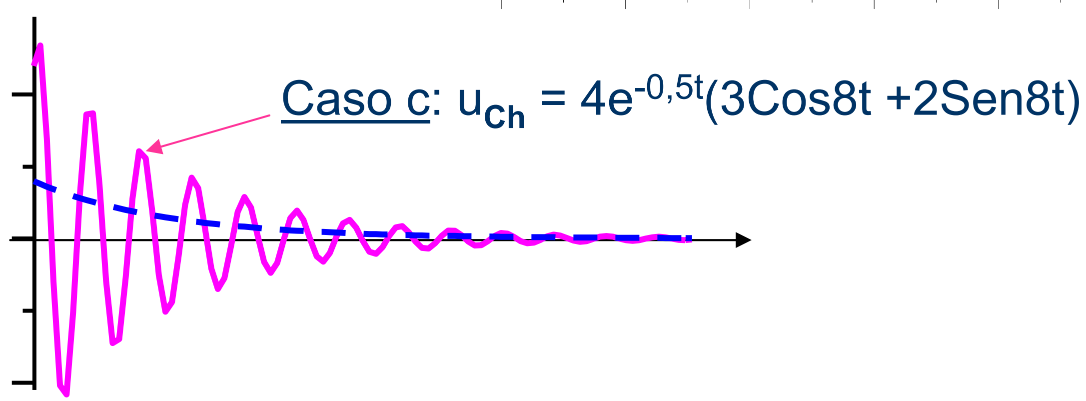
REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de segundo orden) (II)

Circuito serie R-L-C. Formas del transitorio (Ecuación homogénea).

En circuitos de 2º orden, se origina, en general, una ec. dif. homogénea de la forma $0 = LCD^2 + RCD + 1$.Tomándola como una ec. de 2º grado en D, sus soluciones α_1, α_2 pueden ser: **a**) reales $u_{Ch} = Ae^{\alpha 1t} + Be^{\alpha 2t}$ **b**) reales e iguales $u_{Ch} = (a+bt)e^{\alpha t}$ **c**) complejas $u_{Ch} = e^{\alpha t}(ACos\beta t + BSen\beta t)$ **d**) imaginarias (oscilatorio) $u_{Ch} = (A\ Cos\beta t + BSen\beta t)$, originando funciones del tipo de las dibujadas.







REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de segundo orden) (III)

Circuitos R-L-C con fuente de tensión senoidal.

Lo que cambia con respecto al caso anterior es el régimen permanente, que se resuelve como un circuito senoidal con una sola malla y que ya vimos suficientemente durante el curso.

Circuitos R-L-C sin fuente de alimentación.

Se supondrá la L ó el C cargados y se plantea la L.T.K. resultando una ec. dif. homogenea al no existir fuente real, de donde se obtiene la solución total.

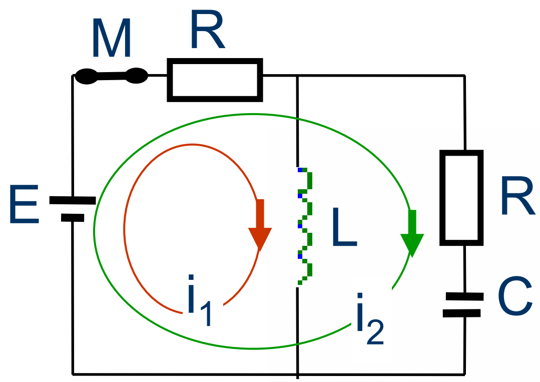
Circuitos R-L-C en paralelo.

Su estudio y solución de las ecuaciones, se obtiene fácilmente aplicando Dualidad.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de segundo orden) (IV)

Circuitos con mas de una malla. (I)

Sea un circuito con una asociación mixta serie-paralelo (mas de una malla), calculemos las corrientes i_1 e i_2 que se producen al cerrar M en t = 0.



$$\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + LD & R \\ R & 2R + \dfrac{1}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

El régimen transitorio se puede obtener resolviendo la ecuación diferencial homogénea, que en este caso se obtiene haciendo

$$\begin{vmatrix} R + LD & R \\ R & 2R + \dfrac{1}{CD} \end{vmatrix} = 0$$

O sea: $2RLD^2 + (2R^2 + L/C)D + R/C = 0$

.. /..

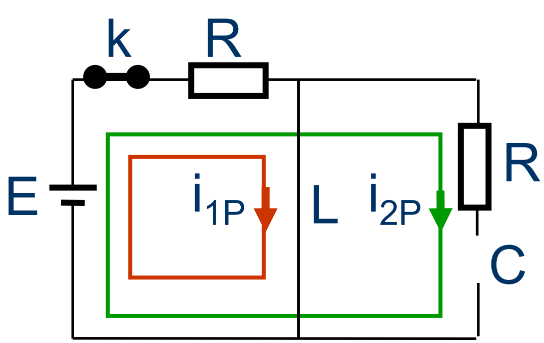
REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Circuitos de segundo orden) (V)

Circuitos con mas de una malla. (II)

Suponiendo que esta ecuación tiene α_1 como raíz doble, tendremos que

$i_{1h} = (A + Bt)\, e^{\alpha_1 t}$ $\quad i_{2h} = (M + Nt)\, e^{\alpha_1 t}$ son las soluciones homogéneas.

Para obtener el régimen permanente en las dos corrientes, podemos dibujar el circuito en esta situación (en c.c. las bobinas son un cortocircuito y los condensadores un circuito abierto).



De donde resulta que $i_{2P} = 0$ $\quad i_{1P} = E/R$, por tanto:

$i_1 = (A + Bt)\, e^{\alpha_1 t} + E/R \qquad i_2 = (M + Nt)e^{\alpha_1 t}.$

Para definir las constantes, obtenemos $i_1(0)$, $i_2(0)$, $u_L(0)$ y la $u_C(0)$ en el circuito y ecuaciones. Los dos primeros valores los obtenemos del circuito en t=0

(Si en t=0 L y C estan descargados, L es un circuito abierto y C es un corto)
Los otros dos valores, se obtienen de las ecuaciones de los elementos.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Aplicación de Laplace) (I)

Dada una función f(t), se designa como su Transformada de Laplace a una función F(s) tal que:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Dada una F(s) si queremos obtener la f(t) que le corresponde, aplicaremos la Anti-transformada de Laplace, que se define como $L^{-1}[F(s)] = f(t)$.

Las ecuaciones de los circuitos son ecuaciones diferenciales, y para obtener la solución del circuito hay que *resolver una ecuación diferencial*.

Al aplicar Laplace las ec. diferenciales se convierten en ec. polinómicas de variable s, la F(s), y ahora, para obtener la solución del circuito hay que *resolver un polinomio*, lo cual es mas sencillo. Pero como la solución que se obtiene, está definida en el campo complejo (al ser s una variable compleja, al igual que la ya vista jw), no es fácil de interpretarla, por lo que es necesario obtener su equivalente en campo real, y expresarla en función del tiempo. Esto se consigue aplicando las anti-transformadas de Laplace.

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Aplicación de Laplace) (II)

Transformadas de Laplace de funciones

$L[f(t)] = F(s)$

$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$L[f^{(n}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0)1$

$$L\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \frac{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

$$L[kx^n e^{-at}] = \frac{kn!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$L[e^{-at}\,\mathrm{Sen}(wt+\varphi)] = \frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}\mathrm{Sen}\,\varphi + \frac{w}{(s+a)^2+w^2}\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$L[e^{-at}\,\mathrm{Cos}(wt+\varphi)] = \frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{w}{(s+a)^2+w^2}\mathrm{Sen}\,\varphi$$

$L[\delta(t)] = 1$ $\delta(t)$ es la Función de Dirac

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Aplicación de Laplace) (III)

Transformadas de Laplace de las variables y fuentes mas habituales.

Variables: Se definen:

$\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$

$\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$

Fuentes:

Si $e(t) = E_0$ $\qquad \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[E_0] = E_0 / s$

Si $e(t) = E_0$ Sen wt $\qquad \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[E_0 \text{ Sen } wt\ ] = E_0 \dfrac{w}{s^2 + w^2}$

Si $i(t) = I_0$ Cos wt $\qquad \mathcal{L}[i(t)] = \mathcal{L}[I_0 \text{ Cos } wt\ ] = I_0 \dfrac{s}{s^2 + w^2}$

La tabla de anti-transformadas es la misma que la de transformadas, pero pasando de las funciones en s a las funciones en t, o sea de F(s) a f(t).

REGÍMENES TRANSITÓRIOS (Aplicación de Laplace) (IV)

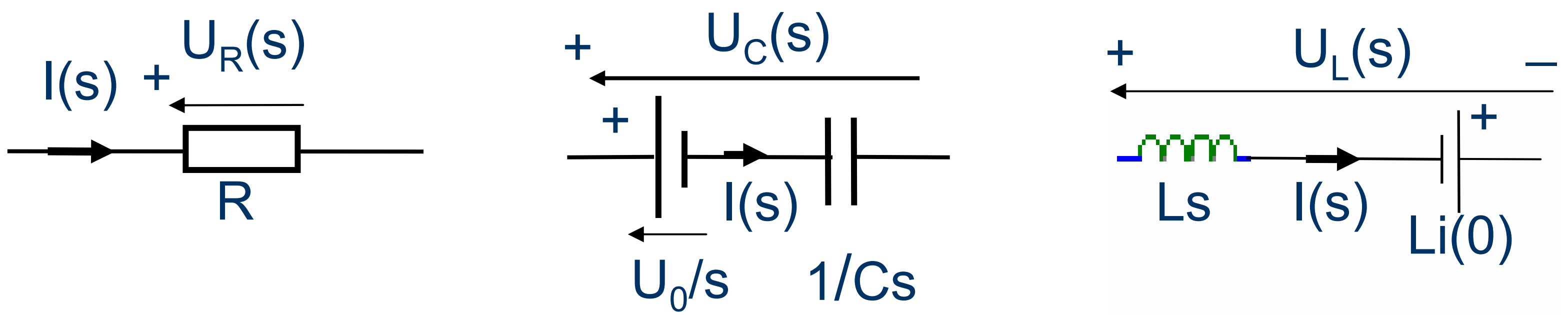
Transformadas de Laplace de los elementos pasivos.

Resistencia.- Se cumple $u_R = Ri$ luego $U_R(s) = RI(s)$.

Condensador.- De la $u_C(t) = U_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$ resulta $\mathcal{L}[u_C(t)] = U_C(s) = \frac{U_0}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$

Bobina.- Se cumple que $u_L(t) = Li'$ luego $U_L(s) = L(sI(s) - i(0))$

Con estas tres expresiones, cumplen los siguientes modelos:



Si en un circuito, hacemos estas sustituciones, hemos realizado la transformación del circuito. Si a continuación aplicamos las leyes de Kirchhoff, podemos obtener la solución I(s), y si a esta le aplicamos la tabla de anti-transformadas obtenemos la solución definitiva i(t).